Vitor Hugo Bento Dias Fernandes

SEMIGRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES PARCIAIS INJECTIVAS CRESCENTES

e generalizações

Lisboa
1998

copyright

Vitor Hugo Bento Dias Fernandes

SEMIGRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES PARCIAIS INJECTIVAS CRESCENTES
e generalizações

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Doutor em Matemática na especialidade de Álgebra pela Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Lisboa
1998

Em memória de minha Mãe
e de minha Avó

À Nini, minha esposa

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar à Professora Gracinda M. S. Gomes os seus sempre permanentes incentivo e apoio desde que fui seu aluno de Licenciatura há quase dez anos.

Em segundo lugar, quero agradecer aos meus orientadores Professores Gracinda M. S. Gomes e Jean-Eric Pin, todo o apoio científico e pessoal que me prestaram e sem o qual este trabalho não teria sido possível.

Uma palavra de agradecimento é sem dúvida devida à Professora Emília Giraldes, pelo apoio constante e encorajador dado ao longo dos anos.

Quero também agradecer ao Professor M. Volkov por todas as sugestões e questões propostas que proporcionaram o enriquecimento deste trabalho.

Agradeço também aos Professores J.-E. Pin, D. McAlister, N. Ruškuc e G. Pfeiffer os programas de computador que me facultaram.

À minha esposa desejo expressar um agradecimento muito especial pelo permanente apoio que me concedeu, bem como por todas as horas, dias e semanas que ao longo dos últimos anos lhe fiquei devedor.

Agradeço ainda a todos os inúmeros amigos que me apoiaram das mais diversas formas.

Ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, ao Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa e ao Laboratoire d'Informatique Algorithmique: Fondements et Applications (Universidade de Paris VI), agradeço todas as facilidades concedidas durante a preparação desta dissertação.

À Casa de Portugal da Cidade Universitária de Paris (Fundação Calouste Gulbenkian), agradeço o apoio prestado nas minhas deslocações a Paris.

Agradeço o apoio financeiro concedido pelo programa PRODEP 4/95 e pela comissão INVOTAN através da Bolsa de Estudo 9/A/96/PO.

Este trabalho foi preparado no âmbito do projecto PRAXIS/2/2.1/MAT/73/94.

Resumo

Os semigrupos de transformações desempenham na Teoria dos Semigrupos o papel correspondente ao dos grupos simétricos na Teoria dos Grupos. Dois teoremas bem conhecidos e análogos ao Teorema de Cayley para grupos, podem justificar esta afirmação. Em primeiro lugar, o teorema que estabelece que todo o semigrupo é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de um semigrupo de transformações totais sobre um conjunto conveniente. Em segundo lugar, na Teoria dos Semigrupos Inversos, o Teorema de Vagner-Preston que estabelece que todo o semigrupo inverso é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de um certo semigrupo inverso simétrico.

Estudamos nesta dissertação dois tipos de semigrupos de transformações parciais e injectivas sobre uma cadeia finita: as transformações crescentes e, o que podemos considerar uma sua generalização, as transformações que preservam a orientação. Começamos por estudar o semigrupo de todas as transformações parciais injectivas e crescentes sobre uma cadeia finita e o semigrupo de todas as transformações parciais injectivas que preservam a orientação sobre uma cadeia finita do ponto de vista estrutural: regularidade, número de elementos e característica. Exibimos também uma descrição dos seus ideais e uma descrição das suas congruências. Determinamos ainda uma apresentação para estes semigrupos. Seguidamente, mostramos que a pseudovariedade de semigrupos gerada pelos semigrupos de transformações parciais injectivas e crescentes sobre uma cadeia finita é uma subpseudovariedade da pseudovariedade de semigrupos gerada pelos semigrupos de transformações totais crescentes sobre uma cadeia finita. Um resultado análogo é demonstrado envolvendo os semigrupos que preservam a orientação sobre uma cadeia finita. Finalmente, estudamos a pseudovariedade de semigrupos inversos $\boldsymbol{NO}$ de todos os semigrupos inversos normalmente ordenados, apresentamos uma descrição da pseudovariedade $\boldsymbol{PCS}$ de semigrupos inversos gerada pelos semigrupos de transformações parciais injectivas e crescentes sobre uma cadeia finita e calculamos o supremo $\boldsymbol{PCS} \vee \boldsymbol{G}$ desta pseudovariedade de semigrupos inversos com a pseudovariedade de todos os grupos finitos.

Abstract

Transformations semigroups play the role in Semigroup Theory of the symmetric group in Group Theory. Two main results are the counterpart of Cayley's theorem: first, the well known result that every semigroup is isomorphic to a subsemigroup of a suitable full transformation semigroup, secondly in Inverse Semigroup Theory, the Vagner-Preston Theorem stating that every inverse semigroup is isomorphic to a subsemigroup of a suitable symmetric inverse semigroup. In this work we will deal with two particular kinds of injective partial transformations: order preserving and orientation preserving transformations.

We study several structural properties of the semigroups of all injective order preserving partial transformations on a finite chain and give a presentation for these semigroups. Similarly, we study the semigroups of all injective orientation preserving partial transformations on a finite chain: we establish descriptions for the ideals and for the congruences and also give a presentation for these semigroups.

We prove that every semigroup of the pseudovariety generated by all semigroups of injective and order preserving partial transformations on a finite chain belongs to the pseudovariety generated by all semigroups of order preserving full transformations on a finite chain. Also, we present a similar result for the pseudovariety of semigroups generated by all semigroups of orientation preserving full transformations on a finite chain.

Finally, we study the pseudovariety of inverse semigroups $\boldsymbol{NO}$ of all normally ordered inverse semigroups. We show that the pseudovariety of inverse semigroups $\boldsymbol{PCS}$ generated by all semigroups of injective and order preserving partial transformations on a finite chain consists of all aperiodic elements of $\boldsymbol{NO}$. Also, we prove that $\boldsymbol{NO}$ is the join pseudovariety of inverse semigroups $\boldsymbol{PCS} \vee \boldsymbol{G}$, where $\boldsymbol{G}$ denotes the pseudovariety of all finite groups.

Índice

Introdução

Os semigrupos de transformações desempenham na Teoria dos Semigrupos o papel correspondente ao dos grupos simétricos na Teoria dos Grupos. Dois resultados bem conhecidos e análogos ao Teorema de Cayley para grupos constituem exemplos que justificam esta afirmação. Em primeiro lugar, o teorema que estabelece que todo o semigrupo é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de um semigrupo de transformações sobre um conjunto conveniente. Em segundo lugar, na Teoria dos Semigrupos Inversos, o Teorema de Vagner-Preston que estabelece que todo o semigrupo inverso é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de um certo semigrupo inverso simétrico (veja-se e.g. [26] e [35]).

A relevância dos semigrupos de transformações na Teoria dos Semigrupos está longe de se resumir aos resultados acima citados. Outros resultados mostram bem o papel determinante dos semigrupos de transformações no estudo dos semigrupos, em particular dos semigrupos finitos. Nomeadamente, é bem conhecido que a pseudovariedade de semigrupos $\boldsymbol{R}$ de todos os semigrupos $\mathcal{R}$-triviais é gerada por todos os semigrupos de transformações extensivas sobre uma cadeia finita e a pseudovariedade de semigrupos $\boldsymbol{J}$ de todos os semigrupos $\mathcal{J}$-triviais é gerada por todos os semigrupos de transformações totais extensivas e crescentes sobre uma cadeia finita (veja-se [38]). Estes resultados levam-nos, naturalmente, à questão de determinar uma descrição para a pseudovariedade $\boldsymbol{O}$ gerada por todos os semigrupos de transformações totais crescentes sobre uma cadeia finita, a qual, tal como $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{J}$, é uma subpseudovariedade de $\boldsymbol{A}$, a pseudovariedade de todos os semigrupos aperiódicos. Embora este problema tenha sido posto por J.-E. Pin em 1987, só em 1995 surgiram os primeiros resultados que reavivaram o interesse por esta questão. Primeiro, P. Higgins [21] mostrou que toda a banda finita pertence a $\boldsymbol{O}$. Seguidamente, generalizando o resultado de P. Higgins, A. Vernitskii e M. Volkov mostraram que todo o semigrupo cujo conjunto dos idempotentes forma um ideal pertence a $\boldsymbol{O}$. Outro resultado, na linha dos anteriores mas independente destes, foi provado por nós em [13] e estabelece que a pseudovariedade

$\boldsymbol{POI}$ gerada por todos os semigrupos de transformações parciais injectivas e crescentes sobre uma cadeia finita é uma subpseudovariedade própria de $\boldsymbol{O}$. Este resultado está também demonstrado no capítulo 4 deste trabalho. No mesmo capítulo apresentamos ainda outra família de elementos da pseudovariedade $\boldsymbol{O}$. O problema de determinar a pseudovariedade $\boldsymbol{O}$ de forma efectiva continua em aberto. Inicialmente foi conjecturada a possibilidade de se ter $\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$. No entanto, também em [21], Higgins apresenta um semigrupo finito $\mathcal{R}$-trivial (e portanto aperiódico) que não pertence a $\boldsymbol{O}$, demonstrando deste modo a falsidade da igualdade sugerida. Ainda no mesmo trabalho, Higgins mostrou que a pseudovariedade $\boldsymbol{O}$ é auto-dual. Consequentemente, existem também semigrupos $\mathcal{L}$-triviais que não pertencem a $\boldsymbol{O}$. Mais ainda, J. Almeida e M. Volkov em [4] mostraram que o intervalo $[\boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}]$ do reticulado de todas as pseudovariedades de semigrupos contém uma cadeia isomorfa à cadeia dos números reais com a ordem usual. Almeida e Volkov provaram de facto, no trabalho referido, que qualquer um dos subintervalos $[\boldsymbol{O}, \boldsymbol{O} \vee \boldsymbol{R}]$, $[\boldsymbol{O} \vee \boldsymbol{R}, \boldsymbol{PO}]$, $[\boldsymbol{PO}, \boldsymbol{PO} \vee \boldsymbol{L}]$, $[\boldsymbol{PO} \vee \boldsymbol{L}, \boldsymbol{PO} \vee \boldsymbol{PO}^*]$ e $[\boldsymbol{PO} \vee \boldsymbol{PO}^*, \boldsymbol{A}]$ (entre outros) do intervalo $[\boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}]$ contém uma cadeia isomorfa à cadeia dos números reais com a ordem usual, em que $\boldsymbol{PO}$ denota a pseudovariedade gerada por todos os semigrupos de transformações (parciais) crescentes sobre uma cadeia finita, $\boldsymbol{PO}^*$ denota a pseudovariedade de semigrupos dual de $\boldsymbol{PO}$ e $\boldsymbol{L}$ denota a pseudovariedade dos semigrupos $\mathcal{L}$-triviais.

Em [3], J. Almeida e P. Higgins apresentaram uma classe de semigrupos de transformações que gera a pseudovariedade de semigrupos $\boldsymbol{A}$. Neste trabalho, Almeida e Higgins construíram duas hierarquias de pseudovariedades, cada uma das quais tendo $\boldsymbol{A}$ como união, cujos membros são pseudovariedades geradas por semigrupos de transformações (totais numa das hierarquias e parciais na outra) sobre uma cadeia finita que preservam e respeitam determinadas cadeias de partições em intervalos.

Recentemente, V. Repnitskiĭ e M. Volkov [40] provaram que toda a pseudovariedade de semigrupos $\boldsymbol{V}$ tal que $\boldsymbol{POI} \subseteq \boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{O} \vee \boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{L}$ não é finitamente baseada. Um resultado análogo ao anterior (formulado para pseudovariedades de monóides) foi estabelecido por M. Volkov [46] para a pseudovariedade (de monóides) $\boldsymbol{PO}$ gerada por todos os monóides de transformações (parciais) crescentes sobre uma cadeia finita: toda a pseudovariedade $\boldsymbol{V}$ tal que $\boldsymbol{PO} \subseteq \boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{PO} \vee \boldsymbol{L}$ não é finitamente baseada.

Outro resultado importante envolvendo pseudovariedades geradas por semigrupos de transformações, devido a C. J. Ash [5] e publicado em 1987, estabelece que a pseudovariedade de semigrupos $\boldsymbol{Ecom}$ constituída por todos os semigrupos cujos idempotentes comutam é gerada pelos semigrupos inversos simétricos (os quais são semigrupos de transformações parciais injectivas) sobre um conjunto finito. Tendo em conta a representação de Vagner-Preston, este teorema de Ash diz-nos que a pseudovariedade de semigrupos $\boldsymbol{Ecom}$ é gerada pela classe de todos os semigrupos inversos finitos. Em face deste resultado, não seria de estranhar que a pseudovariedade $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{Ecom}$ dos semigrupos aperiódicos cujos idempotentes comutam fosse gerada pelos semigrupos inversos finitos e aperiódicos. No entanto, recentemente, P. Higgins e S. Margolis [24] mostraram que tal não é o caso.

Em [10], D. Cowan e N. Reilly consideraram a classe $\boldsymbol{PCS}$ de todos os semigrupos inversos finitos isomorfos a um semigrupo de transformações parciais injectivas e crescentes sobre uma cadeia finita. Cowan e Reilly provaram que $\boldsymbol{PCS}$ é uma pseudovariedade de semigrupos inversos propriamente contida em $\boldsymbol{A}$ e, mais do que isso, que é tal que o intervalo $[\boldsymbol{PCS}, \boldsymbol{A}[$ do reticulado de todas as pseudovariedades de semigrupos inversos tem a potência do contínuo. A partir dos resultados de Cowan e Reilly podemos deduzir que um semigrupo inverso com n elementos pertence a $\boldsymbol{PCS}$ se e só se é isomorfo a um semigrupo de transformações parciais injectivas e crescentes sobre uma cadeia com n elementos. Obtemos assim uma descrição efectiva para a pseudovariedade de semigrupos inversos $\boldsymbol{PCS}$ e portanto a pseudovariedade de semigrupos inversos $\boldsymbol{PCS}$ é decidível. No entanto, ainda em [10], Cowan e Reilly mostraram que $\boldsymbol{PCS}$ não é finitamente baseada. Em [14] introduzimos a classe $\boldsymbol{NO}$ de todos os semigrupos inversos normalmente ordenados e provámos tratar-se de uma pseudovariedade de semigrupos inversos. Esta pseudovariedade é, por construção, decidível. Provámos que os semigrupos inversos fundamentais de $\boldsymbol{NO}$ coincidem com os semigrupos aperiódicos de $\boldsymbol{NO}$, os quais constituem exactamente a pseudovariedade $\boldsymbol{PCS}$. Obtivemos assim uma descrição alternativa para $\boldsymbol{PCS}$, a partir da qual resulta também o seguinte refinamento da descrição de Cowan e Reilly: um semigrupo inverso com n *idempotentes* pertence a $\boldsymbol{PCS}$ se e só se é isomorfo a um semigrupo de transformações parciais injectivas e crescentes sobre uma cadeia com n elementos. A pseudovariedade de semigrupos inversos $\boldsymbol{NO}$ permitiu-nos, por outro lado, obter uma descrição para o supremo da pseudovariedade $\boldsymbol{PCS}$ com a pseudovariedade $\boldsymbol{G}$ de todos os grupos finitos: $\boldsymbol{NO} = \boldsymbol{PCS} \vee \boldsymbol{G}$. Estes resultados são apresentados no capítulo 5 deste trabalho.

Do ponto de vista estrutural e combinatório, são inúmeros os trabalhos publicados por autores que elegeram os semigrupos de transformações como objecto do seu estudo. Citamos, seguidamente, apenas alguns dos resultados que, de um modo mais particular, estão relacionados com o trabalho que aqui apresentamos.

A descoberta de uma apresentação para os monóides $\mathcal{O}_n$, de todas as transformações totais crescentes sobre uma cadeia com n elementos, data de 1962 e deve-se a

A. Aĭzenštat [1]. Em 1994, A. Solomon [44] estabeleceu apresentações para determinados monóides de transformações crescentes sobre uma cadeia finita, em particular, para os monóides $\mathcal{PO}_n$, de todas as transformações (parciais) crescentes sobre uma cadeia com n elementos. Uma apresentação para os monóides das partições ordenadas de um número natural, os quais são a menos de um isomorfismo monóides de transformações crescentes, foi estabelecida em 1996 por T. Lavers [29]. A característica do monóide $\mathcal{O}_n$ e a característica do monóide $\mathcal{PO}_n$ foram determinadas em 1992 por G. Gomes e J. Howie [18].

Os semigrupos de transformações que preservam a orientação sobre uma cadeia finita foram introduzidos em 1996 por P. Catarino e P. Higgins [8]. Neste trabalho, Catarino e Higgins estudaram diversas propriedades do monóide $\mathcal{OP}_n$, de todas as transformações totais crescentes que preservam a orientação sobre uma cadeia com n elementos e, em 1997, P. Catarino [9] estabeleceu uma apresentação para os monóides $\mathcal{OP}_n$, baseada na apresentação de A. Aĭzenštat para os monóides $\mathcal{O}_n$.

Nesta dissertação estudamos fundamentalmente dois tipos de semigrupos de transformações parciais e injectivas sobre uma cadeia finita: as transformações crescentes e, o que podemos considerar uma sua generalização, as transformações que preservam a orientação.

O primeiro capítulo deste trabalho é dedicado à apresentação dos conceitos e resultados gerais da Teoria dos Semigrupos que nos parecem ser necessários para uma boa compreensão dos capítulos seguintes. Ainda no capítulo 1, apresentamos uma extensão da representação de Munn para semigrupos cujos elementos possuem no máximo um inverso, a qual utilizamos no capítulo 4. Esta representação permite-nos obter uma descrição da maior congruência que separa idempotentes para os semigrupos finitos cujos elementos possuem no máximo um inverso, ou seja para os semigrupos da pseudovariedade $\boldsymbol{BG}$ (veja-se [39]). No capítulo seguinte, estudamos os semigrupos de todas as transformações parciais injectivas e crescentes sobre uma cadeia finita do ponto de vista estrutural. Mostramos que estes semigrupos são submonóides inversos do semigrupo inverso simétrico com o mesmo conjunto base, calculamos o seu cardinal e apresentamos uma descrição para as relações de Green. Além disso, exibimos descrições para os ideais e para as congruências destes monóides e determinamos a sua característica. O resultado principal deste capítulo aparece na sua última secção e estabelece uma apresentação, com n geradores e $\frac{1}{2}(n^2+5n-4)$ relações, para o monóide $\mathcal{POI}_n$, de todas as transformações parciais injectivas e crescentes sobre uma cadeia com n elementos. Esta apresentação foi obtida pelo método "adivinhar e provar"[42], onde no passo "adivinhar"usámos, de um modo crucial, algumas ferramentas computacionais, nomeadamente, o programa de J.-E. Pin "Semigroupe"[37], o programa de D. McAlister [31] e o programa GAP [43, 30, 36]. No capítulo 3, fazemos uma abordagem análoga à que fizemos no capítulo 2, elegendo, desta vez, os semigrupos das transformações parciais injectivas que preservam a orientação sobre uma cadeia finita como objecto do nosso estudo. Baseada na apresentação do monóide $\mathcal{POI}_n$, estabelecemos neste capítulo uma apresentação, com $n+1$ geradores e $\frac{1}{2}(n^2+7n-2)$ relações, para o monóide $\mathcal{POPI}_n$, de todas as transformações parciais injectivas que preservam a orientação sobre uma cadeia com n elementos. A partir desta, deduzimos ainda uma apresentação para o monóide $\mathcal{POPI}_n$, com o mesmo número de relações, mas apenas dois geradores. No capítulo 4, mostramos que as pseudovariedades de semigrupos $\boldsymbol{POI}$ e $\boldsymbol{POPI}$ são subpseudovariedades próprias de $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{OP}$, respectivamente, em que $\boldsymbol{POPI}$ denota a pseudovariedade de semigrupos gerada por todos os semigrupos de transformações parciais injectivas que preservam a orientação sobre uma cadeia finita e $\boldsymbol{OP}$ a pseudovariedade de semigrupos gerada por todos os semigrupos de transformações totais que preservam a orientação sobre uma cadeia finita. Ainda neste capítulo, apresentamos mais uma subclasse de $\boldsymbol{O}$ e introduzimos o conceito de semigrupo normalmente ordenado, mostrando que a classe $\boldsymbol{NOS}$ de todos os semigrupos normalmente ordenados constitui uma pseudovariedade de semigrupos. Finalmente, o último capítulo deste trabalho é dedicado ao estudo da pseudovariedade $\boldsymbol{NO}$ dos semigrupos inversos normalmente ordenados e à apresentação dos resultados que mencionámos atrás.

Capítulo 1

Preliminares

O primeiro capítulo deste trabalho é fundamentalmente dedicado à apresentação dos conceitos e resultados gerais da Teoria de Semigrupos que nos parecem ser necessários para uma boa compreensão dos capítulos seguintes. Usamos como referência principal o livro de J. Howie [26] (ou [25]), embora muitos dos resultados possam também ser encontrados em [28], [19], [23] ou [35], entre outros. Apresentamos ainda resultados e conceitos que podem ser encontrados nos livros de J. Almeida [2] ou de J.-E. Pin [38]. Estes resultados são referidos nos restantes capítulos, em geral, não mencionando outras fontes. Em algumas secções apresentamos outros resultados mais específicos, mas ainda suficientemente gerais para que a sua inclusão se justifique fora do local onde são utilizados. Todas as secções deste capítulo à excepção da 5 foram elaboradas seguindo a linha descrita atrás. Na secção 5, apresentamos uma extensão da representação de Munn para semigrupos cujos elementos possuem no máximo um inverso que utilizamos no capítulo 4 e que julgamos ser material original. Por esta representação envolver objectos mais gerais do que aqueles com que trabalhamos no capítulo 4, optámos por incluí-la neste primeiro capítulo.

1. Semigrupos

Um *semigrupo* é um par $(S, \cdot)$ formado por um conjunto S não vazio (dito o *suporte* ou o *universo* do semigrupo) e por uma operação binária $\cdot$ sobre S (i.e. uma aplicação $\cdot : S \times S \to S$) *associativa*, i.e. tal que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (em que $a \cdot b$ representa a imagem por $\cdot$ do par (a, b)), para quaisquer $a, b, c \in S$. A uma operação binária associativa chamamos *multiplicação*, quando fazemos uso da linguagem multiplicativa (neste caso, em geral, não usamos qualquer símbolo para designar a operação). Usamos como norma esta linguagem. Não havendo perigo de ambiguidade, representamos um semigrupo apenas pelo seu suporte.

Dados dois conjuntos X e Y, uma aplicação f de X em Y e $x \in X$, denotamos por xf a imagem do elemento x por meio de f.

Exemplos 1.1.1. Seja X um conjunto qualquer. Denotamos por $\mathcal{PT}(X)$ o conjunto de todas as *transformações (parciais)* sobre X, i.e. o conjunto de todas as aplicações com domínio e contradomínio contidos em X. O conjunto $\mathcal{PT}(X)$ munido da operação de *composição de relações* constitui um semigrupo (veja-se [26, Proposição 1.4.2]). Seja $s \in \mathcal{PT}(X)$. Representamos por $\mathrm{Dom}(s)$ o domínio de s e por $\mathrm{Im}(s)$ a imagem de s. Designamos por *característica* de s o cardinal do conjunto $\mathrm{Im}(s)$. Observemos que, dados $s, t \in \mathcal{PT}(X)$, o produto st é a transformação parcial definida do seguinte modo:

1. $\mathrm{Dom}(st) = (\mathrm{Im}(s) \cap \mathrm{Dom}(t))s^{-1}$;

2. Para qualquer $x \in \mathrm{Dom}(st)$, $x(st) = (xs)t$,

tendo-se $\mathrm{Im}(st) = (\mathrm{Im}(s) \cap \mathrm{Dom}(t))t$ (veja-se [26, Proposição 1.4.3]).

Dado um semigrupo S, um elemento $e \in S$ diz-se *idempotente* se $e = e^2$. Representamos por $E(S)$ o conjunto de todos os elementos idempotentes de S. Estes elementos desempenham um papel de extrema importância no estudo dos semigrupos. Um resultado amplamente conhecido (veja-se [26, Proposição 1.2.3]) e de importância fundamental no estudo dos semigrupos finitos é o seguinte:

Teorema 1.1.1. *Seja S um semigrupo finito e $a \in S$. Então, existe um número natural n tal que a^n é um idempotente. Em particular, todo o semigrupo finito possui um elemento idempotente.* ∎

Seja S um semigrupo. Dizemos que um elemento $u \in S$ tal que $xu = ux = x$, para qualquer $x \in S$, é uma *identidade* de S. É fácil verificar que um semigrupo possui no máximo uma identidade. Chamamos *monóide* a um semigrupo com identidade. Tendo em conta que a identidade de um monóide é única, podemos encarar um monóide S como uma álgebra do tipo $(2, 0)$ cuja operação binária é associativa e o elemento distinguido em S pela operação nulária é uma identidade do semigrupo S. Em geral, representamos a identidade de um monóide S por 1_S ou, não havendo perigo de ambiguidade, simplesmente, por 1. Denotamos por S^1 o "menor" monóide que contém S, i.e. se S é um monóide então $S^1 = S$, caso contrário S^1 tem como suporte a união disjunta de S com $\{1\}$ e multiplicação definida por $s.t = st$, se $s, t \in S$ e $s.1 = 1.s = s$, se $s \in S^1$. Dizemos que um elemento $u \in S$ é um *zero* de S se, para qualquer $s \in S$, $su = us = u$. Tal elemento, se existir, é único e, usualmente, é denotado por 0. Neste trabalho, denotamos por S^0 o semigrupo que resulta de S adicionando-lhe um (*novo*) zero, i.e. o semigrupo S^0 tem como suporte a união disjunta de S com $\{0\}$ (supondo que 0 é um símbolo que não denota nenhum elemento de S) e multiplicação definida por $s.t = st$, se $s, t \in S$ e $s.0 = 0.s = 0$, se $s \in S^0$. Observemos que S^0 nunca coincide com S, ao contrário da definição usual de S^0 (veja-se [26]).

Dizemos que um monóide G é um *grupo* se, para qualquer elemento g de G, existe $g' \in G$ tal que $gg' = g'g = 1$. É claro que $E(G) = \{1\}$, para qualquer grupo G.

Dizemos que um semigrupo S é *comutativo* se $xy = yx$, para quaisquer $x, y \in S$.

Sejam S um semigrupo e S' um subconjunto não vazio de S. Dizemos que S' é um *subsemigrupo* de S se for fechado para a operação de S, i.e. se $xy \in S'$, para quaisquer $x, y \in S'$. Dizemos que S' é um *grupo* de S se, para a operação induzida pela de S, S' é um grupo. Se S é um monóide, então um *submonóide* de S é um subsemigrupo de S que contém a identidade de S. Se S é um grupo, então qualquer grupo de S é um submonóide de S. Neste caso, um grupo de S é também designado por *subgrupo*.

Exemplos 1.1.2. Seja X um conjunto qualquer. Denotamos por $\mathcal{T}(X)$ o conjunto de todas as transformações sobre X de domínio X (*transformações totais sobre* X), i.e. o conjunto de todas as aplicações de X em X. Então $\mathcal{T}(X)$ é um subsemigrupo de $\mathcal{PT}(X)$. Observemos que esta operação em $\mathcal{T}(X)$ não passa da composição usual de aplicações. Além disso, é claro que a aplicação identidade sobre X é uma identidade de $\mathcal{PT}(X)$ e pertence a $\mathcal{T}(X)$, pelo que $\mathcal{PT}(X)$ é um monóide e $\mathcal{T}(X)$ é um submonóide de $\mathcal{PT}(X)$.

Outro submonóide importante de $\mathcal{PT}(X)$, e que nos interessa em especial, é o *semigrupo inverso simétrico* $\mathcal{I}(X)$, i.e. o conjunto de todas as transformações parciais *injectivas* sobre X. É claro que a aplicação identidade é uma transformação injectiva e que a composição de duas transformações parciais injectivas é uma transformação injectiva, donde $\mathcal{I}(X)$ é um submonóide de $\mathcal{PT}(X)$. Além disso, o conjunto das permutações sobre X, i.e. o conjunto de todas as bijecções de X em X, está contido em $\mathcal{I}(X)$ e forma um grupo de $\mathcal{I}(X)$ (e de $\mathcal{PT}(X)$) conhecido por *grupo simétrico sobre* X.

Sejam S um semigrupo e X um subconjunto de S. Dizemos que um subsemigrupo S' de S é *gerado* por X (ou que X é um *conjunto de geradores* de S'), se o menor (para a relação de inclusão) subsemigrupo de S que contém X é S'. De um modo análogo definimos *submonóide gerado* por um determinado subconjunto de um monóide. Chamamos *característica* de um semigrupo (respectivamente, de um monóide) S ao mínimo dos cardinais dos conjuntos de geradores de S.

Dados dois semigrupos S e T, dizemos que uma aplicação $\varphi : S \to T$ é um *homomorfismo* (de semigrupos) se $a\varphi b\varphi = (ab)\varphi$, para quaisquer $a, b \in S$. Se S e T são dois monóides, dizemos que um homomorfismo (de semigrupos) $\varphi : S \to T$ é um *homomorfismo de monóides* se φ preserva a identidade, i.e. se $1\varphi = 1$. Se S e T são dois grupos, é fácil ver que todo o homomorfismo (de semigrupos) $\varphi : S \to T$ é um homomorfismo de monóides. Dizemos que um homomorfismo $\varphi : S \to T$ é um *isomorfismo* se φ é uma aplicação simultaneamente injectiva e sobrejectiva. Dizemos que dois semigrupos são *isomorfos* se existe um isomorfismo entre eles. Dados um monóide S e um homomorfismo sobrejectivo $\varphi : S \to T$, então T é um monóide e $1\varphi = 1$. Logo, dado um isomorfismo $\varphi : S \to T$, o semigrupo S é um monóide se e só se o semigrupo T é um monóide e, neste caso, $1\varphi = 1$. Observemos que, se $\varphi : S \to T$ é um isomorfismo, então a aplicação inversa $\varphi^{-1} : T \to S$ é também um isomorfismo. A um homomorfismo de S em S também chamamos *endomorfismo*. Denotamos por $\mathrm{End}(S)$ o conjunto dos endomorfismos de S. Observemos que $\mathrm{End}(S)$ é um submonóide de $\mathcal{T}(S)$. Dados dois semigrupos S e T, dizemos que S *divide* T (ou que S é um *divisor* de T) se S é uma imagem homomorfa de algum subsemigrupo de T.

Proposição 1.1.2. *Sejam $\varphi : S \to T$ um homomorfismo de semigrupos, S' um subsemigrupo de S e T' um subsemigrupo de T. Então, $S'\varphi$ é um subsemigrupo de T e se for não vazio $T'\varphi^{-1}$ é um subsemigrupo de S.* ■

O resultado seguinte é particularmente importante no capítulo 3:

Proposição 1.1.3. *Sejam S e T dois semigrupos finitos, $\varphi : S \to T$ um homomorfismo sobrejectivo e H um grupo de T. Então, existe um grupo G de S tal que $G\varphi = H$.*

Demonstração. Em primeiro lugar, observemos que $H\varphi^{-1}$ é não vazio, visto que φ é sobrejectivo. Logo, $H\varphi^{-1}$ é um subsemigrupo de S, atendendo à Proposição 1.1.2, e além disso $(H\varphi^{-1})\varphi = H$. Podemos então considerar um subsemigrupo G de S de cardinalidade mínima entre os subsemigrupos de S cuja imagem é H.

Sejam e' a identidade de H e $A = \{s \in G \mid s\varphi = e'\}$. Como $G\varphi = H$, então A é não vazio e, atendendo à Proposição 1.1.2, A é um subsemigrupo de S. Logo, pelo Teorema 1.1.1, A possui um idempotente. Fixemos um idempotente e de A. Seja $B_e = \{s \in G \mid se = es = s\}$. Então B_e é um subsemigrupo (com identidade e) de G e $B_e\varphi \subseteq G\varphi$. Mais ainda, $B_e\varphi = H$. De facto, dado $h \in H$, existe $s \in G$ tal que $s\varphi = h$. Como $ese \in B_e$ e $(ese)\varphi = e'he' = h$, então $H \subseteq B_e\varphi$. Portanto $B_e\varphi = H$. Por conseguinte, atendendo à minimalidade de G, temos $B_e = G$, pelo que

G é um monóide de identidade e. Visto que e foi escolhido arbitrariamente em A e H é um grupo, então G não possui outros idempotentes. Tomemos $g \in G$. Então, pelo Teorema 1.1.1, g^n é um idempotente, para algum $n \in \mathbb{N}$, e, consequentemente, $g^n = e$. Logo, G é um grupo, como queríamos demonstrar. ∎

Sejam S um semigrupo e $s \in S$. Às aplicações

$$\begin{array}{rccc} \rho_s\colon & S & \to & S \\ & x & \mapsto & xs \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccc} \lambda_s\colon & S & \to & S \\ & x & \mapsto & sx \end{array}$$

chamamos *translação direita* e *translação esquerda* de S associada a s, respectivamente.

O resultado seguinte constitui o análogo para semigrupos do Teorema de Cayley para grupos (veja-se [26, Teorema 1.1.2]):

Teorema 1.1.4. *Sejam S um semigrupo e $X = S^1$. Então, a aplicação ϕ de S em $\mathcal{T}(X)$ definida por, para qualquer $s \in S$, $s\phi = \rho_s$, em que ρ_s denota a translação direita de S^1 associada a s, é um homomorfismo injectivo.* ∎

Seja $S = (S, \cdot)$ um semigrupo. Chamamos *semigrupo dual* de S ao semigrupo $S^r = (S, \cdot_r)$, em que a multiplicação está definida por $s \cdot_r t = t \cdot s$, para quaisquer $s, t \in S$. Outra construção clássica de um semigrupo a partir de outros semigrupos dados é-nos fornecida pelo produto directo. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $S_1, \dots, S_n$ semigrupos. O *produto directo* dos semigrupos $S_1, \dots, S_n$ é o semigrupo de suporte $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ e multiplicação definida por

$$(s_1, s_2, \dots, s_n)(t_1, t_2, \dots, t_n) = (s_1t_1, s_2t_2, \dots, s_nt_n),$$

para quaisquer $(s_1, s_2, \dots, s_n), (t_1, t_2, \dots, t_n) \in S$. Esta definição pode, de uma forma natural, ser estendida a um número arbitrário de semigrupos (veja-se [26]).

2. Ideais e congruências

Seja S um semigrupo. Dados dois subconjuntos A e B de S, denotamos por AB o subconjunto de S definido por $AB = \{ab \in S \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$.

Dizemos que um subconjunto não vazio I de S é um *ideal* (respectivamente, um *ideal esquerdo*, um *ideal direito*) de S se $S^1IS^1 \subseteq I$ (respectivamente, $S^1I \subseteq I$, $IS^1 \subseteq I$). Dizemos que um ideal (respectivamente, um ideal esquerdo, um ideal direito) de S é *gerado* por um conjunto X de S se for o menor (para a relação de inclusão) ideal (respectivamente, ideal esquerdo, ideal direito) de S que contém X. Dizemos que um ideal (respectivamente, um ideal esquerdo, um ideal direito) de S é *principal* se for gerado por um único elemento de S. É claro que, dado $a \in S$, o ideal principal (respectivamente, o ideal principal esquerdo, o ideal principal direito) de S gerado por a é S^1aS^1 (respectivamente, S^1a, aS^1).

Seja ρ uma relação de equivalência em S. Dizemos que ρ é *compatível à esquerda* (respectivamente, *compatível à direita*) com a multiplicação de S se, para quaisquer $x, y, z \in S$ tais que $x \,\rho\, y$, temos $zx \,\rho\, zy$ (respectivamente, $xz \,\rho\, yz$). Dizemos que ρ é uma *relação de congruência* de S se ρ é compatível à esquerda e à direita com a multiplicação de S. No conjunto quociente S/ρ definimos, de um modo natural, uma estrutura de semigrupo: dados $x, y \in S$,

$$[x]_\rho [y]_\rho = [xy]_\rho,$$

onde $[x]_\rho$ representa a ρ-classe do elemento $x \in S$. Também representamos a ρ-classe de um elemento $x \in S$ por $x\rho$.

Naturalmente, dada uma relação de congruência ρ de S, temos um *homomorfismo canónico* $\pi : S \to S/\rho$, definido por $x\pi = [x]_\rho$, para qualquer $x \in S$.

Dada uma aplicação $\varphi : S \to T$, designamos por *núcleo* de φ a relação de equivalência $\mathrm{Ker}(\varphi)$ de S definida por: para quaisquer $s, t \in S$, $(s, t) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ se e só se $s\varphi = t\varphi$. Se $\varphi : S \to T$ é um homomorfismo de semigrupos, então o núcleo de φ é uma congruência de S.

Têm lugar diversos teoremas de Álgebra Universal sobre homomorfismos, mas interessa-nos salientar o seguinte (veja-se [26, Proposição 1.5.2]):

Teorema 1.2.1. *Sejam $\varphi : S \to T$ um homomorfismo de semigrupos e $\pi : S \to S/\mathrm{Ker}(\varphi)$ o homomorfismo canónico associado a $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Então, existe um único homomorfismo $\overline{\varphi} : S/\mathrm{Ker}(\varphi) \to T$ tal que $\varphi = \pi\overline{\varphi}$.* ■

Outro exemplo importante de congruências é a congruência associada a um ideal. Sejam S um semigrupo e I um ideal de S. Definimos a congruência $\sim_I$ em S, denominada *congruência de Rees* associada a I, da seguinte forma: $s \sim_I t$ se e só se $s = t$ ou $s, t \in I$, para quaisquer $s, t \in S$. É claro que, dado $s \in S$ temos

$$[s]_{\sim_I} = \begin{cases} I, & \text{se } s \in I \\ \{s\}, & \text{se } s \notin I. \end{cases}$$

Usualmente denotamos $S/{\sim_I}$ simplesmente por S/I. Observemos que S/I é um semigrupo com zero I.

Dizemos que uma congruência *separa idempotentes* se cada uma das suas classes possuir no máximo um idempotente. Dizemos que um homomorfismo *separa idempotentes* se o seu núcleo é uma congruência que separa idempotentes. Na secção 5 deste capítulo apresentamos uma descrição da maior congruência que separa idempotentes num semigrupo finito cujos elementos possuem no máximo um inverso.

Terminamos esta secção com um resultado que garante a existência de uma congruência máxima (para a relação de inclusão) contida numa qualquer relação de equivalência de um semigrupo (veja-se [25, Proposição I.5.13]).

Proposição 1.2.2. *Sejam S um semigrupo e R uma relação de equivalência em S. Então, a relação*

$$R^\flat = \{(s,t) \in S \times S \mid (xsy, xty) \in R, \text{ para quaisquer } x, y \in S^1\}$$

é a maior congruência de S contida em R. ∎

3. Relações de Green

As relações de Green foram introduzidas na Teoria dos Semigrupos por J. A. Green em 1951 e, desde então, desempenham um papel determinante no estudo dos semigrupos. Seja S um semigrupo. Em S, definimos as seguintes relações de equivalência:

1. $s \,\mathcal{R}\, t$ se e só se $sS^1 = tS^1$;

2. $s \,\mathcal{L}\, t$ se e só se $S^1 s = S^1 t$;

3. $s \,\mathcal{J}\, t$ se e só se $S^1 s S^1 = S^1 t S^1$,

para quaisquer $s, t \in S$.

As relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ são compatíveis com o produto, respectivamente à esquerda e à direita. Por outro lado, as relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ são *permutáveis* (i.e. $\mathcal{R}\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{R}$) e portanto

$$\mathcal{D} = \mathcal{R}\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{R}$$

é ainda uma relação de equivalência de S. Além disso, $\mathcal{D}$ é a menor relação de equivalência de S que contém simultaneamente $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$. Definimos ainda a relação $\mathcal{H}$ em S como sendo a intersecção das relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$.

Dado um semigrupo S, às relações $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{J}, \mathcal{D}$ e $\mathcal{H}$ chamamos *relações de Green* de S. Atendendo às definições, as relações de Green verificam pois as seguintes inclusões:

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}, \mathcal{L} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}.$$

Sendo $\mathcal{K}$ uma das relações de Green definida num semigrupo S, denotamos por K_s a $\mathcal{K}$-classe de um elemento $s \in S$.

Em determinados semigrupos, algumas das relações de Green podem ser coincidentes. Por exemplo, nos semigrupos comutativos e nos grupos todas as relações de Green coincidem. No caso dos grupos, as relações de Green são a relação universal e o seu estudo nada nos diz (mas tal não se passa num semigrupo em geral). Nos semigrupos finitos, de que são exemplo os semigrupos que à frente vamos tratar, temos $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ (veja-se [26, Proposição 2.1.4]). Adiante será fundamental ter presente a descrição das relações de Green nos semigrupos de transformações, pelo que seguidamente apresentamos o modo como estão definidas nos semigrupos $\mathcal{T}(X)$ e $\mathcal{I}(X)$, com X um conjunto qualquer. Podemos enunciar o seguinte resultado (veja-se [26, Exercícios 2.6.16 e 5.11.2]):

Proposição 1.3.1. *Seja X um conjunto. Em $\mathcal{T}(X)$ temos:*

1. $s \,\mathcal{L}\, t$ *se e só se* $\mathrm{Im}(s) = \mathrm{Im}(t)$*;*

2. $s \,\mathcal{R}\, t$ *se e só se* $\mathrm{Ker}(s) = \mathrm{Ker}(t)$*;*

3. $s \,\mathcal{J}\, t$ *se e só se* $|\,\mathrm{Im}(s)| = |\,\mathrm{Im}(t)|$*;*

4. $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.

Em $\mathcal{I}(X)$ temos:

1. $s \,\mathcal{L}\, t$ *se e só se* $\mathrm{Im}(s) = \mathrm{Im}(t)$*;*

2. $s \,\mathcal{R}\, t$ *se e só se* $\mathrm{Dom}(s) = \mathrm{Dom}(t)$*;*

3. $s \,\mathcal{J}\, t$ *se e só se* $|\,\mathrm{Im}(s)| = |\,\mathrm{Im}(t)|$*;*

4. $\mathcal{D} = \mathcal{J}$. ■

Associadas às relações de Green $\mathcal{R}, \mathcal{L}$ e $\mathcal{J}$ num semigrupo S, estão definidas em S as seguintes relações de quasi-ordem: para quaisquer $s, t \in S$,

1. $s \leq_{\mathcal{R}} t$ se e só se $sS^1 \subseteq tS^1$;

2. $s \leq_{\mathcal{L}} t$ se e só se $S^1 s \subseteq S^1 t$;

3. $s \leq_{\mathcal{J}} t$ se e só se $S^1 s S^1 \subseteq S^1 t S^1$.

Seja $\mathcal{K}$ uma das relações de Green $\mathcal{R}, \mathcal{L}$ ou $\mathcal{J}$. Em $S/\mathcal{K}$ definimos uma relação de ordem parcial $\leq_{\mathcal{K}}$ por: para quaisquer $s, t \in S$, $K_s \leq_{\mathcal{K}} K_t$ se e só se $s \leq_{\mathcal{K}} t$. Dados $s, t \in S$, escrevemos $s <_{\mathcal{K}} t$ ou $K_s <_{\mathcal{K}} K_t$ se $s \leq_{\mathcal{K}} t$ e $(s, t) \notin \mathcal{K}$.

Usamos frequentemente o resultado seguinte (veja-se [38, Proposição 3.1.4]):

Proposição 1.3.2. *Sejam S um semigrupo finito, $s, t \in S$ e $e \in E(S)$. Então:*

1. *Se $s \leq_{\mathcal{R}} t$ e $s \,\mathcal{J}\, t$ então $s \,\mathcal{R}\, t$;*
2. *Se $s \leq_{\mathcal{L}} t$ e $s \,\mathcal{J}\, t$ então $s \,\mathcal{L}\, t$.* ∎

O lema seguinte pode ser encontrado em [41]:

Lema 1.3.3. *Sejam $\varphi : S \to T$ um homomorfismo sobrejectivo de semigrupos finitos e J' uma $\mathcal{J}$-classe de T. Então $J'\varphi^{-1} = J_1 \cup \cdots \cup J_k$, para certas $\mathcal{J}$-classes $J_1, \ldots, J_k$ de S, e qualquer elemento J_i ($1 \leq i \leq k$) $\leq_{\mathcal{J}}$-minimal de $\{J_1, \ldots, J_k\}$ é tal que $J_i\varphi = J'$. Além disso, se J' é regular, então o índice i é único e J_i é o elemento $\leq_{\mathcal{J}}$-mínimo de $\{J_1, \ldots, J_k\}$, mais ainda J_i é também regular.* ∎

Seja $\mathcal{K}$ uma das relações de Green. Dizemos que um semigrupo S é $\mathcal{K}$-*trivial* se $\mathcal{K}$ é a relação identidade de S. Por outro lado, tendo em conta a Proposição 1.2.2, faz sentido considerar a maior congruência de S contida em $\mathcal{H}$. Assim, dizemos que um semigrupo S é *fundamental* se a maior congruência de S contida em $\mathcal{H}$ for a identidade ([19]). É claro que todo o semigrupo $\mathcal{H}$-trivial é fundamental. O recíproco não é, em geral, verdadeiro.

Apresentamos em seguida uma breve descrição da estrutura de uma $\mathcal{D}$-classe de um semigrupo de cardinalidade arbitrária.

Sejam S um semigrupo e a e b elementos de S tais que $a \,\mathcal{D}\, b$. Então $L_a \cap R_b$ é uma $\mathcal{H}$-classe de S. Mais precisamente, $L_a \cap R_b$ é a $\mathcal{H}$-classe de qualquer elemento $c \in S$ tal que $a \,\mathcal{L}\, c$ e $c \,\mathcal{R}\, b$.

O resultado seguinte é essencial para o estudo de uma $\mathcal{D}$-classe e é conhecido por *Lema de Green* (veja-se [26]).

Proposição 1.3.4. *Sejam S um semigrupo e $a, b \in S$, $s, t \in S^1$ tais que $a = bt$ e $b = as$ (temos $a \,\mathcal{R}\, b$). Então, as translações direitas ρ_s e ρ_t induzem bijecções inversas uma da outra que preservam $\mathcal{R}$-classes (i.e. se $x \in L_a$ então $x \,\mathcal{R}\, xs$ e, analogamente, se $x \in L_b$ então $x \,\mathcal{R}\, xt$), de L_a sobre L_b e de L_b sobre L_a, respectivamente.* ∎

Envolvendo elementos $\mathcal{L}$-relacionados e as translações esquerdas, temos também o resultado dual do anterior.

Do Lema de Green resulta que duas $\mathcal{L}$-classes contidas numa mesma $\mathcal{D}$-classe têm a mesma cardinalidade. Do seu dual, o mesmo podemos concluir para duas $\mathcal{R}$-classes contidas numa mesma $\mathcal{D}$-classe. Combinando o Lema de Green com o seu dual, podemos deduzir que duas $\mathcal{H}$-classes contidas numa mesma $\mathcal{D}$-classe têm ainda a mesma cardinalidade (veja-se [26, Lema 2.2.3]).

Seguidamente, enunciamos mais algumas consequências importantes do Lema de Green (veja-se [26]).

Proposição 1.3.5. *Sejam S um semigrupo e $a, b \in S$. Então, $ab \in R_a \cap L_b$ se e só se $L_a \cap R_b$ contém um idempotente.* ■

Num semigrupo finito, atendendo à Proposição 1.3.2, temos ainda:

Proposição 1.3.6. *Sejam S um semigrupo finito, a e b dois elementos de S tais que $a \,\mathcal{D}\, b$. Seja $D = D_a (= D_b)$. Então, $ab \in D$ se e só se $ab \in R_a \cap L_b$.* ■

Ainda a respeito de $\mathcal{H}$-classes, temos:

Proposição 1.3.7. *Sejam S um semigrupo e H uma $\mathcal{H}$-classe de S. Então, $H^2 \cap H = \emptyset$ ou $H^2 = H$ e, neste caso, H é um grupo de S. Em particular, H contém no máximo um idempotente.* ■

Observemos que qualquer grupo de um semigrupo S está necessariamente contido numa $\mathcal{H}$-classe de S, donde os grupos maximais de S são exactamente as $\mathcal{H}$-classes de S que contêm um idempotente. Além disso, podemos afirmar que:

Proposição 1.3.8. *Dois grupos maximais de um semigrupo S contidos numa mesma $\mathcal{D}$-classe são isomorfos.* ■

Dizemos que um semigrupo S é *aperiódico* se os seus grupos são triviais. Para um semigrupo finito, temos (veja-se [38, Proposição 3.4.2]):

Proposição 1.3.9. *Seja S um semigrupo finito. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *S é aperiódico;*
2. *Para qualquer $a \in S$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = a^{n+1}$;*
3. *Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $a \in S$, $a^m = a^{m+1}$;*
4. *S é $\mathcal{H}$-trivial.* ■

Dizemos que um semigrupo com zero é *nulo* se o produto de quaisquer dois dos seus elementos é igual a zero. Dizemos que um semigrupo S com zero é 0-*simples* se S não é um semigrupo nulo e os únicos ideais de S são $\{0\}$ e S ou, equivalentemente, se S não é nulo e as únicas $\mathcal{J}$-classes de S são $\{0\}$ e $S \setminus \{0\}$.

Seja S um semigrupo. Dizemos que um elemento $s \in S$ é *regular* se existe um elemento $x \in S$ tal que $s = sxs$. Se, além de $s = sxs$, o elemento x verificar $x = xsx$, dizemos que x é um *inverso* de s em S. É fácil provar que todo o elemento regular de S possui pelo menos um inverso. De facto, se x é tal que $s = sxs$ então xsx é um inverso de s. Denotamos por $\mathrm{Reg}(S)$ o conjunto de todos os elementos regulares de S. Dizemos que um semigrupo S é *regular* se $\mathrm{Reg}(S) = S$. Dizemos que uma $\mathcal{D}$-classe de um semigrupo S é *regular* se todos os seus elementos são regulares em S.

Temos as seguintes descrições de uma $\mathcal{D}$-classe regular (veja-se [26]):

Proposição 1.3.10. *Seja D uma $\mathcal{D}$-classe de um semigrupo S. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *D é regular;*
2. *D possui pelo menos um elemento regular;*
3. *Toda a $\mathcal{R}$-classe contida em D possui pelo menos um elemento idempotente;*
4. *Toda a $\mathcal{L}$-classe contida em D possui pelo menos um elemento idempotente;*
5. *D possui pelo menos um elemento idempotente.*

O resultado que apresentamos a seguir relaciona as relações de Green $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ de um semigrupo com as relações de Green $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ de um seu subsemigrupo regular [26, Proposição 2.4.2] (veja-se também [38, Proposição 1.10]).

Proposição 1.3.11. *Sejam S um semigrupo e T um subsemigrupo regular de S. Então, dados $s, t \in T$, temos:*

1. *$s \,\mathcal{R}\, t$ em T se e só se $s \,\mathcal{R}\, t$ em S;*
2. *$s \,\mathcal{L}\, t$ em T se e só se $s \,\mathcal{L}\, t$ em S.* ∎

Observemos que um resultado análogo ao anterior não é válido, em geral, para as relações $\mathcal{J}$ e $\mathcal{D}$ (veja-se [26, página 57]).

Dado um semigrupo S, definimos em $E(S)$ uma relação $\leq$ do seguinte modo: para quaisquer $e, f \in E(S)$, $e \leq f$ se e só se $ef = e = fe$. A relação $\leq$ é uma ordem parcial em $E(S)$ designada por *ordem natural* de $E(S)$ (veja-se [23]). Dados $e, f \in E(S)$, dizemos que f *cobre* e se $e \leq f$. Note-se que no nosso contexto não se exige que se $x \in E(S)$ é tal que $e \leq x \leq f$ então $x = e$ ou $x = f$. Notemos que, num semigrupo finito, os idempotentes contidos numa mesma $\mathcal{D}$-classe formam uma *anti-cadeia* para a ordem natural:

Proposição 1.3.12. *Seja S um semigrupo finito. Se e e f são dois idempotentes $\mathcal{D}$-relacionados de S tais que $e \leq f$ então $e = f$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.3.6, $e = ef \in L_f$ e $e = fe \in R_f$. Logo, $e \in H_f$ e portanto, atendendo à Proposição 1.3.7, $e = f$, como queríamos demonstrar. ∎

Terminamos esta secção com um resultado que nos dá uma descrição dos ideais de um semigrupo (não necessariamente finito) cujo quociente por $\mathcal{J}$ forma uma cadeia finita para a relação de ordem parcial $\leq_{\mathcal{J}}$. Os semigrupos que estudamos nos capítulos 2 e 3 deste trabalho gozam desta propriedade.

Proposição 1.3.13. *Seja S um semigrupo tal que $S/\mathcal{J}$ é uma cadeia finita para a relação de ordem parcial $\leq_{\mathcal{J}}$: $S/\mathcal{J} = \{J_0 <_{\mathcal{J}} J_1 <_{\mathcal{J}} \cdots <_{\mathcal{J}} J_n\}$. Então S possui $n+1$ ideais $I_0, I_1, \ldots, I_n$ tais que $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n$, sendo I_k o ideal principal gerado por qualquer elemento de J_k, para qualquer $k \in \{0, \ldots, n\}$.*

Demonstração. Em primeiro lugar, observemos que, para qualquer $k \in \{0, \ldots, n\}$, $I_k = \cup_{i=0}^{k} J_k$ é um ideal de S, tendo-se $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n$. Por outro lado, dado um ideal I de S, sendo $k = \max\{i \in \{0, 1, \ldots, n\} \mid I \cap J_i \neq \emptyset\}$, verificamos que $I = I_k$, pelo que o resultado fica demonstrado. ∎

4. Semigrupos inversos

Seja S um semigrupo. Dizemos que S é um semigrupo *inverso* se S é um semigrupo regular tal que cada elemento possui um único inverso. Usualmente, dados um semigrupo inverso S e um elemento $s \in S$, denotamos por s^{-1} o inverso de s.

Pode demonstrar-se que um semigrupo regular é um semigrupo inverso se e só se os seus idempotentes comutam. Outra caracterização dos semigrupos inversos é dada através das relações de Green $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$: um semigrupo S é inverso se e só se cada $\mathcal{R}$-classe e cada $\mathcal{L}$-classe de S contém um e um só idempotente (veja-se [26, Teorema 5.1.1]).

Observemos que, sendo S um semigrupo inverso finito e D uma $\mathcal{D}$-classe de S, então o número de elementos de D é igual ao produto do número de elementos de uma (qualquer) $\mathcal{H}$-classe contida em D pelo quadrado do número de idempotentes de D. Em particular, num semigrupo inverso aperiódico finito S, o número de elementos de uma $\mathcal{D}$-classe D de S é igual ao quadrado do número de idempotentes de D. Além disso, tendo em conta a Proposição 1.3.12, podemos mostrar que todo o semigrupo inverso aperiódico finito tem um zero.

Exemplos 1.4.1. Para qualquer conjunto X, o semigrupo $\mathcal{I}(X)$ é inverso (veja-se [25, Proposição 5.5.5]). O inverso de um elemento de $\mathcal{I}(X)$ é a sua transformação inversa. Seja s um elemento de $\mathcal{PT}(X)$. Denotando por $\mathrm{Fix}(s)$ o conjunto dos pontos fixos de s, temos que s é um idempotente se e só se $\mathrm{Im}(s) \subseteq \mathrm{Fix}(s)$. Por outro lado, notemos que $\mathrm{Fix}(s)$ é sempre um subconjunto de $\mathrm{Im}(s)$. Assim, os idempotentes de $\mathcal{I}(X)$ são exactamente as *identidades parciais* (i.e. todas as restrições da aplicação identidade) sobre X.

Seja S um semigrupo inverso. Uma vez que os idempotentes de S comutam, $E(S)$ é um subsemigrupo comutativo de S, o qual designamos por *semireticulado dos idempotentes de S*. Mais geralmente, designamos por *semireticulado* qualquer semigrupo comutativo cujos elementos são todos idempotentes. É claro que qualquer semireticulado é um semigrupo inverso.

Seja S um semigrupo com pelo menos um idempotente e tal que os idempotentes comutam. Então o subconjunto dos elementos regulares $\mathrm{Reg}(S)$ de S constitui um semigrupo inverso.

Seguidamente, apresentamos algumas propriedades elementares de um semigrupo inverso (veja-se [26, Proposição 5.1.2]).

Proposição 1.4.1. *Sejam S um semigrupo inverso e $E = E(S)$. Então:*

1. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, *para quaisquer* $a, b \in S$;
2. $aea^{-1}, a^{-1}ea \in E$, *para quaisquer* $a \in S$ *e* $e \in E$;
3. $a \mathrel{\mathcal{L}} b$ *se e só se* $a^{-1}a = b^{-1}b$, *para quaisquer* $a, b \in S$;
4. $a \mathrel{\mathcal{R}} b$ *se e só se* $aa^{-1} = bb^{-1}$, *para quaisquer* $a, b \in S$;
5. $e \mathrel{\mathcal{D}} f$ *se e só se existe* $a \in S$ *tal que* $aa^{-1} = e$ *e* $a^{-1}a = f$, *para quaisquer* $e, f \in E$. ■

Temos também (veja-se [26, Proposição 5.1.4]):

Proposição 1.4.2. *Qualquer imagem homomorfa de um semigrupo inverso é ainda um semigrupo inverso. Além disso, se $\varphi : S \to T$ é um homomorfismo entre semigrupos inversos então $(a\varphi)^{-1} = a^{-1}\varphi$, para qualquer $a \in S$.* ∎

Naturalmente, podemos considerar um semigrupo inverso como sendo uma álgebra com duas operações: uma binária (a multiplicação) e a outra unária (a aplicação que transforma cada elemento no seu inverso), i.e. como sendo uma álgebra do tipo (2,1). Neste contexto, a proposição anterior estabelece que qualquer homomorfismo de semigrupos entre dois semigrupos inversos é um homomorfismo de álgebras do tipo (2,1).

Tendo em conta o resultado anterior, podemos demonstrar a seguinte propriedade relativa a congruências de um semigrupo inverso (veja-se [35] ou [26]):

Proposição 1.4.3. *Sejam S um semigrupo inverso, ρ uma congruência de S e $s, t \in S$ tais que $s\,\rho\,t$. Então, $s^{-1}\,\rho\,t^{-1}$.* ∎

Uma *representação* de um semigrupo inverso S é um homomorfismo de S para algum semigrupo inverso simétrico $\mathcal{I}(X)$. Dado um semigrupo inverso S, a aplicação

$$\begin{array}{rcccccc} \rho : & S & \to & \mathcal{I}(S) & & & \\ & s & \mapsto & \rho_s : & Ss s^{-1} & \to & Ss^{-1}s \\ & & & & x & \mapsto & xs, \end{array}$$

é um homomorfismo injectivo, designado por *representação de Vagner-Preston* de S (vejam-se [26], [35]). Para cada $s \in S$, a transformação ρ_s *preserva* $\mathcal{R}$-classes (i.e. se $x \in Sss^{-1}$ então $x\,\mathcal{R}\,x\rho_s$) e, portanto, para qualquer $\mathcal{R}$-classe R de S, podemos considerar a aplicação $\rho|_R$ de S em $\mathcal{I}(R)$ definida por $s\rho|_R = \rho_s|_R$, para qualquer $s \in S$. Então $\rho|_R$ é um homomorfismo (designado por *representação de Vagner-Preston restrita a R* [10]), o qual em geral não é injectivo. Apesar disso, temos que S é isomorfo a um subsemigrupo do produto directo de todos os semigrupos $\mathcal{I}(R)$, com $R \in S/\mathcal{R}$.

Outra representação clássica de um semigrupo inverso é a *representação de Munn*: dado um semigrupo inverso S e sendo $E = E(S)$, a aplicação

$$\begin{array}{rcccccc} \delta : & S & \to & \mathcal{I}(E) & & & \\ & s & \mapsto & \delta_s : & Ess^{-1} & \to & Es^{-1}s \\ & & & & e & \mapsto & s^{-1}es \end{array}$$

é um homomorfismo. Observemos que, em geral, a representação de Munn de um semigrupo inverso não é injectiva. De facto, o núcleo de δ é a maior congruência de

S que separa idempotentes e δ é injectiva se e só se S é um semigrupo fundamental. Notemos também que, para qualquer $s \in S$, a transformação δ_s *preserva* $\mathcal{D}$-classes (i.e. se $e \in Ess^{-1}$ então $e \mathcal{D} s^{-1}es$), pelo que, dada uma $\mathcal{D}$-classe D de S, a aplicação $\delta_s|_D$ é uma bijecção de $D \cap Ess^{-1}$ em $D \cap Es^{-1}s$. Para mais detalhes, veja-se [26] ou [35].

Como aplicação da representação de Munn salientamos a seguinte propriedade de um semigrupo inverso finito.

Proposição 1.4.4. *Sejam S um semigrupo inverso finito e J_1 e J_2 duas $\mathcal{J}$-classes de S tais que $J_1 <_{\mathcal{J}} J_2$. Então, existe $k \geq 1$ tal que cada idempotente de J_2 cobre exactamente k idempotentes de J_1.*

Demonstração. Sejam $E = E(S)$ e δ a representação de Munn de S. Seja $f \in J_2 \cap E$. Então, dado um idempotente g de J_1, existem $x, y \in S$ tais que $g = xfy$. Tomemos $e = x^{-1}xfyy^{-1}$. Então e é um idempotente de J_1 e $e \leq f$, pelo que f cobre pelo menos um idempotente de J_1. Seguidamente, tomemos $f_1, f_2 \in J_2 \cap E(S)$ e seja $s \in J_2$ tal que $ss^{-1} = f_1$ e $s^{-1}s = f_2$. Uma vez que $\delta_s|_{J_1}$ é uma bijecção de $J_1 \cap Ess^{-1}$ sobre $J_1 \cap Es^{-1}s$ com inversa $\delta_{s^{-1}}|_{J_1}$, então f_1 cobre $g \in J_1 \cap E$ se e só se f_2 cobre $s^{-1}gs \in J_1 \cap E$, pelo que f_1 e f_2 cobrem o mesmo número de idempotentes de J_1, como queríamos demonstrar. ∎

Terminamos esta secção com um lema que será usado à frente.

Lema 1.4.5. *Sejam S um semigrupo inverso aperiódico finito, $E = E(S)$, $s \in S$ e F um subconjunto de $Ess^{-1} \cap Es^{-1}s$ tal que $F\delta_s \subseteq F$. Então, $\delta_s|_F$ é a aplicação identidade sobre F. Além disso, se $e, f \in Ess^{-1}$ são tais que $e = s^{-1}fs$ e $f = s^{-1}es$ então $e = f$.*

Demonstração. Em primeiro lugar, observemos que, como δ_s é uma transformação injectiva, $F \subseteq \mathrm{Dom}(\delta_s)$, $F\delta_s \subseteq F$ e F é finito, então $\delta_s|_F$ é uma bijecção de F sobre F. Como S é finito e aperiódico, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s^{n+1} = s^n$. Então, s^n é um idempotente de S. Consequentemente, δ_s^n é um idempotente de $\mathcal{I}(E)$, donde uma identidade parcial de E. Por outro lado, $\delta_s^{n+1} = \delta_s^n$. Seja $e \in F$. Como $\delta_s|_F$ é uma aplicação de F em F, então podemos garantir que $e \in \mathrm{Dom}(\delta_s^n)$. Logo $e = e\delta_s^n = e\delta_s^{n+1} = e\delta_s^n\delta_s = e\delta_s$ e portanto $\delta_s|_F$ é a aplicação identidade sobre F. A segunda afirmação do lema é uma consequência imediata do que acabámos de demonstrar, tomando $F = \{e, f\}$. ∎

5. Uma extensão da representação de Munn

Apresentamos nesta secção uma extensão da representação de Munn para semigrupos cujos elementos possuem no máximo um inverso. De facto, os semigrupos com esta propriedade são exactamente os semigrupos tais que cada $\mathcal{R}$-classe e cada $\mathcal{L}$-classe possui no máximo um idempotente, pelo que no caso finito estamos perante os semigrupos da conhecida classe $\boldsymbol{BG}$ (veja-se [39]). Os semigrupos cujos idempotentes comutam são também exemplos de semigrupos com esta propriedade.

Seja S um semigrupo. A cada elemento $s \in S$ associamos os seguintes subconjuntos de $E(S)$:

$$\mathcal{R}(s) = \{e \in E(S) \mid e \leq_{\mathcal{R}} s\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(s) = \{e \in E(S) \mid e \leq_{\mathcal{L}} s\}.$$

Os dois lemas seguintes estabelecem propriedades destes subconjuntos.

Lema 1.5.1. *Sejam S um semigrupo e $s \in S$. Então:*

(i) Se $e \in \mathcal{R}(s)$ então $es \in \mathrm{Reg}(S)$;

(ii) Se $e \in \mathcal{L}(s)$ então $se \in \mathrm{Reg}(S)$.

Demonstração. Sejam $s \in S$ e $e \in \mathcal{R}(s)$. Então, $e = sx$, para certo $x \in S^1$, pelo que $es = eees = e(sx)es = (es)x(es)$ e portanto $es \in \mathrm{Reg}(S)$. Assim, provámos a condição (i). De modo análogo se prova a condição (ii). ■

Dados um semigrupo S cujos elementos possuem no máximo um inverso e um elemento regular $s \in S$, denotamos por s^{-1} o único inverso de s em S.

Lema 1.5.2. *Sejam S um semigrupo cujos elementos possuem no máximo um inverso e $s \in S$.*

(i) Se $e \in \mathcal{R}(s)$ então:

(a) $e = (es)(es)^{-1} = s(es)^{-1} = s(es)^{-1}e$;

(b) $(es)^{-1}(es) \in \mathcal{L}(s)$ e $(es)^{-1}(es)\,\mathcal{D}\,e$.

(ii) Se $e \in \mathcal{L}(s)$ então:

(a) $e = (se)^{-1}(se) = (se)^{-1}s = e(se)^{-1}s$;

(b) $(se)(se)^{-1} \in \mathcal{R}(s)$ e $(se)(se)^{-1}\,\mathcal{D}\,e$.

Demonstração. Demonstramos somente a condição (i), já que a prova da condição (ii) é análoga. Sejam $s \in S$ e $e \in \mathcal{R}(s)$. Tomemos $x \in S^1$ tal que $e = sx$. Uma vez que $es \in \mathrm{Reg}(S)$, podemos considerar o idempotente $es(es)^{-1}$. Como $e = ee = esx = es(es)^{-1}esx$, então e e $es(es)^{-1}$ são idempotentes $\mathcal{R}$-relacionados, donde $e = es(es)^{-1}$. Por outro lado, visto que $es = eees = esxes$, então $xesx$ é o inverso de es, pelo que $(es)^{-1} = xesx$ e portanto $s(es)^{-1} = sxesx = eee = e$. Finalmente, a partir desta igualdade é imediato que $e = s(es)^{-1}e$, pelo que demonstrámos a condição (a). Em seguida demonstramos a condição (b). Comecemos por observar que trivialmente $(es)^{-1}(es) \in \mathcal{L}(s)$. Além disso, como $e = es(es)^{-1}$ e $es = es(es)^{-1}es$, então $e \,\mathcal{R}\, es \,\mathcal{L}\, (es)^{-1}es$, pelo que $(es)^{-1}(es) \,\mathcal{D}\, e$, como queríamos demonstrar. ∎

Podemos agora demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 1.5.3. *Seja S um semigrupo cujos elementos possuem no máximo um inverso. Para qualquer $s \in S$, as aplicações*

$$\begin{array}{rccc} \delta_s: & \mathcal{R}(s) & \to & \mathcal{L}(s) \\ & e & \mapsto & (es)^{-1}(es) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} \bar{\delta}_s: & \mathcal{L}(s) & \to & \mathcal{R}(s) \\ & e & \mapsto & (se)(se)^{-1} \end{array}$$

são bijecções inversas uma da outra que preservam $\mathcal{D}$-classes.

Demonstração. Seja $s \in S$. Atendendo ao Lema 1.5.2, podemos afirmar que δ_s e $\bar{\delta}_s$ são aplicações que preservam $\mathcal{D}$-classes. Tomemos $e \in \mathcal{R}(s)$. Então

$$\begin{aligned} e\delta_s\bar{\delta}_s &= ((es)^{-1}es)\bar{\delta}_s = s(es)^{-1}es(s(es)^{-1}es)^{-1} = (s(es)^{-1}e)s((s(es)^{-1}e)s)^{-1} \\ &= es(es)^{-1} = e. \end{aligned}$$

Analogamente, $e\bar{\delta}_s\delta_s = e$, para qualquer $e \in \mathcal{L}(s)$. Portanto δ_s e $\bar{\delta}_s$ são bijecções inversas uma da outra. ∎

Estamos então em condições de poder demonstrar o seguinte teorema de representação para semigrupos cujos elementos possuem no máximo um inverso:

Teorema 1.5.4. *Seja S um semigrupo cujos elementos possuem no máximo um inverso. Seja $E = E(S)$. Então a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \delta: & S & \to & \mathcal{I}(E) \\ & s & \mapsto & \delta_s \end{array}$$

é um homomorfismo que separa idempotentes.

Demonstração. Mostramos em primeiro lugar que δ é um homomorfismo. Sejam $s, t \in S$. Comecemos por ver que $\mathrm{Dom}(\delta_s\delta_t) = \mathrm{Dom}(\delta_{st})$. Tomemos $e \in \mathrm{Dom}(\delta_s\delta_t)$. Então $e \in \mathcal{R}(s)$ e $(es)^{-1}(es) = e\delta_s \in \mathcal{R}(t)$, pelo que $e = s(es)^{-1}$ (pelo Lema 1.5.2) e $(es)^{-1}(es) = tx$, para algum $x \in S^1$. Logo,

$$e = s(es)^{-1} = s(es)^{-1}(es)(es)^{-1} = stx(es)^{-1}$$

e portanto $e \in \mathcal{R}(st)$, ou seja $e \in \mathrm{Dom}(\delta_{st})$. Reciprocamente, tomemos $e \in \mathrm{Dom}(\delta_{st})$. Como $e \in \mathcal{R}(st)$, pelo Lema 1.5.2, temos $e = st(est)^{-1}$, donde $e \in \mathcal{R}(s)$, ou seja $e \in \mathrm{Dom}(\delta_s)$. Em particular, $es \in \mathrm{Reg}(S)$. Por outro lado, também pelo Lema 1.5.2, $e = est(est)^{-1} = est(est)^{-1}e$, donde $es = (es)t(est)^{-1}(es)$. Além disso, $t(est)^{-1}(es)t(est)^{-1} = t(est)^{-1}$, pelo que $(es)^{-1} = t(est)^{-1}$. Logo, $e\delta_s = (es)^{-1}es = t(est)^{-1}es \in \mathcal{R}(t)$ e portanto $e\delta_s \in \mathrm{Dom}(\delta_t)$. Logo $e \in \mathrm{Dom}(\delta_s\delta_t)$ e, por conseguinte,

$$\mathrm{Dom}(\delta_{st}) = \mathrm{Dom}(\delta_s\delta_t).$$

Seguidamente, tomemos $e \in \mathrm{Dom}(\delta_{st})$. Então, $e \in \mathcal{R}(s)$, pelo que es é regular. Além disso, $e\delta_s = (es)^{-1}es \in \mathcal{R}(t)$, donde $(es)^{-1}est$ é também regular. Como $est = es(es)^{-1}est$, então $est\,\mathcal{L}\,(es)^{-1}est$. Por outro lado, $e \in \mathcal{R}(st)$, pelo que est é regular. Então,

$$(est)^{-1}est\,\mathcal{L}\,est\,\mathcal{L}\,(es)^{-1}est\,\mathcal{L}\,((es)^{-1}est)^{-1}(es)^{-1}est,$$

donde $(est)^{-1}est = ((es)^{-1}est)^{-1}(es)^{-1}est$, e portanto

$$e\delta_s\delta_t = ((es)^{-1}(es))\delta_t = ((es)^{-1}est)^{-1}(es)^{-1}est = (est)^{-1}est = e\delta_{st}.$$

Provámos assim que δ é um homomorfismo.

Resta-nos mostrar que δ separa idempotentes. Tomemos $e, f \in E$ tais que $\delta_e = \delta_f$. Então, em particular, $\mathcal{R}(e) = \mathcal{R}(f)$. Logo, $e\,\mathcal{R}\,f$ e portanto $e = f$, por hipótese. ∎

Dado um semigrupo S cujos elementos possuem no máximo um inverso, ao homomorfismo definido no teorema anterior chamamos *representação de Munn* de S, já que, como mostramos adiante, se S for um semigrupo inverso então este homomorfismo é precisamente a representação de Munn usual que foi apresentada na secção anterior.

Provamos agora que, para um semigrupo *finito* cujos elementos possuem no máximo um inverso, se tem o resultado seguinte que também é válido para um semigrupo inverso arbitrário:

Teorema 1.5.5. *Se S é um semigrupo finito cujos elementos possuem no máximo um inverso então o núcleo da representação de Munn de S é a maior congruência de S que separa idempotentes.*

Demonstração. Sejam $E = E(S)$ e $\delta : S \to \mathcal{I}(E)$ a representação de Munn de S. Pelo Teorema 1.5.4, o homomorfismo δ separa idempotentes, donde o seu núcleo $\mathrm{Ker}(\delta)$ é uma congruência que separa idempotentes. Resta assim provar que $\mathrm{Ker}(\delta)$ é a congruência máxima (para a relação de inclusão entre congruências) de S que separa idempotentes. Com este objectivo, consideremos uma congruência ρ de S que separa idempotentes. Em primeiro lugar, observemos que, uma vez que $S \in \boldsymbol{BG}$, então $S/\rho \in \boldsymbol{BG}$, visto que a classe de semigrupos finitos $\boldsymbol{BG}$ é fechada para imagens homomorfas (veja-se [39]). Sejam $s, t \in S$ tais que $s\rho t$. Comecemos por mostrar que $\mathcal{R}(s) = \mathcal{R}(t)$. Tomemos $e \in \mathcal{R}(s)$. Então existe $x \in S^1$ tal que $e = sx$. Uma vez que $s\rho t$, então $sx\rho tx$, i.e. $e\rho tx$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $(tx)^n$ é um idempotente. Como $e\rho(tx)^n$ e ρ separa idempotentes, então $e = (tx)^n$, pelo que $e \in \mathcal{R}(t)$ e, por conseguinte, temos $\mathcal{R}(s) \subseteq \mathcal{R}(t)$. De um modo análogo se prova a inclusão recíproca, pelo que $\mathcal{R}(s) = \mathcal{R}(t)$. Em seguida, tomemos $e \in \mathcal{R}(s) = \mathcal{R}(t)$. Então, es e et são regulares. Além disso, $(es)^{-1}\rho$ e $(et)^{-1}\rho$ são inversos de $(es)\rho$ e $(et)\rho$ em S/ρ, respectivamente. Como os elementos do semigrupo S/ρ possuem no máximo um inverso e $(es)\rho = (et)\rho$, então $(es)^{-1}\rho = (et)^{-1}\rho$. Logo, $((es)^{-1}es)\rho = ((et)^{-1}et)\rho$, pelo que $(es)^{-1}es = (et)^{-1}et$, visto que ρ separa idempotentes. Portanto $e\delta_s = e\delta_t$. Assim, provámos que $\delta_s = \delta_t$ e, por conseguinte, $\rho \subseteq \mathrm{Ker}(\delta)$, como queríamos demonstrar. ∎

O resultado anterior dá-nos uma descrição da maior congruência que separa idempotentes num semigrupo finito cujos elementos possuem no máximo um inverso. De facto, mais geralmente, P. Edwards em [11] apresenta uma descrição da maior congruência que separa idempotentes num semigrupo *eventualmente regular*, i.e. num semigrupo em que cada elemento possui uma potência regular, e portanto num semigrupo finito, já que todo o semigrupo finito é eventualmente regular (veja-se também [6]).

Dizemos que um semigrupo S é *E-fundamental* se a única congruência de S que separa idempotentes for a identidade (observemos que em [12] P. Edwards designa por *fundamental* um semigrupo nestas condições). Visto que uma congruência contida em $\mathcal{H}$ separa idempotentes, qualquer semigrupo E-fundamental é também fundamental. O recíproco não é geralmente verdadeiro, mesmo no caso finito, como mostramos no exemplo que se segue. Observemos que, no entanto, se S for regular então a maior congruência de S contida em $\mathcal{H}$ coincide com a maior congruência de S que separa idempotentes (veja-se [25, Proposição 2.4.5]). Assim, um semigrupo regular é fundamental se e só se é E-fundamental.

Exemplo 1.5.1. Seja S um semigrupo finito *nulo*. Então S é $\mathcal{H}$-trivial e $E(S) = \{0\}$, pelo que a congruência universal separa idempotentes e S é um semigrupo fundamental. Porém, se S possui pelo menos dois elementos, S não é E-fundamental.

Terminamos esta secção mostrando que a representação de Munn que construímos para o caso mais geral de um semigrupo cujos elementos possuem no máximo um inverso coincide com a representação apresentada por Munn para um semigrupo inverso. Com este propósito, começamos por demonstrar o seguinte lema:

Lema 1.5.6. *Sejam S um semigrupo cujos elementos possuem no máximo um inverso e $E = E(S)$. Então, para qualquer $s \in \mathrm{Reg}(S)$, temos:*

(i) $\mathcal{R}(s) = ss^{-1}E \cap E$;

(ii) $\mathcal{L}(s) = Es^{-1}s \cap E$;

(iii) Para qualquer $e \in \mathcal{R}(s)$, $(es)^{-1}(es) = s^{-1}es$.

Demonstração. Comecemos por provar a condição (i). Suponhamos que $s \in \mathrm{Reg}(S)$ e $e \in \mathcal{R}(s)$. Então $e = sx = ss^{-1}sx = ss^{-1}e$, para certo $x \in S^1$, donde $e \in ss^{-1}E \cap E$. Logo, $\mathcal{R}(s) \subseteq ss^{-1}E \cap E$. Uma vez que a inclusão recíproca é imediata, então $\mathcal{R}(s) = ss^{-1}E \cap E$. De forma análoga se prova a condição (ii). Com o objectivo de provar a condição (iii), tomemos $s \in \mathrm{Reg}(S)$ e $e \in \mathcal{R}(s)$. Vimos atrás que, nestas condições, $e = ss^{-1}e$. Além disso, es é regular e $(es)^{-1}(es)$ e $s^{-1}es$ são idempotentes. Como $es = ss^{-1}es$, então $es \,\mathcal{L}\, s^{-1}es$, pelo que $(es)^{-1}(es) \,\mathcal{L}\, es \,\mathcal{L}\, s^{-1}es$ e portanto $(es)^{-1}(es) = s^{-1}es$. ∎

O lema anterior permite-nos concluir o resultado pretendido.

Proposição 1.5.7. *Sejam S um semigrupo inverso e $E = E(S)$. Então, o homomorfismo $\delta : S \to \mathcal{I}(E)$ definido no Teorema 1.5.4 é exactamente a representação de Munn usual.* ∎

6. Produtos semidirectos

Nesta secção apresentamos mais um processo clássico de construir um novo semigrupo à custa de semigrupos dados. Sejam S e T dois semigrupos e

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi: & T^1 & \to & \mathrm{End}^r(S) & & & \\ & t & \mapsto & t\varphi: & S & \to & S \\ & & & & s & \mapsto & (s)t\varphi \end{array}$$

um homomorfismo de monóides. A este homomorfismo associamos o semigrupo $S *_\varphi T$ de suporte $S \times T$ e multiplicação definida por

$$(s_1, t_1)(s_2, t_2) = (s_1((s_2)t_1\varphi), t_1t_2),$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in S$ e $t_1, t_2 \in T$. Com o objectivo de simplificar a notação, em geral representemos o elemento $(s)t\varphi$ de S por $t.s$, para quaisquer $s \in S$ e $t \in T^1$. Então, uma aplicação $\varphi : T^1 \to \mathrm{End}^r(S)$ é um homomorfismo de monóides se e só se satisfaz as seguintes condições:

1. $t.(s_1s_2) = (t.s_1)(t.s_2)$;
2. $(t_1t_2).s = t_1.(t_2.s)$;
3. $1.s = s$,

para quaisquer $s_1, s_2 \in S$ e $t_1, t_2 \in T^1$. Neste contexto, dizemos que φ define uma *acção* (à esquerda) de T sobre S. Nestas condições, podemos reescrever a multiplicação em $S *_\varphi T$ do seguinte modo:

$$(s_1, t_1)(s_2, t_2) = (s_1(t_1.s_2), t_1t_2),$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in S$ e $t_1, t_2 \in T$. Designamos o semigrupo $S *_\varphi T$ por *produto semidirecto* (associado a φ) e, não havendo ambiguidade, denotamo-lo simplesmente por $S * T$.

Observemos que o produto directo de dois semigrupos é um caso particular de um produto semidirecto (o associado ao homomorfismo que transforma todos os elementos na identidade).

Exemplo 1.6.1. Sejam S e T dois semigrupos. Denotemos por S^{T^1} o semigrupo cujos elementos são todas as aplicações de T^1 em S e cuja multiplicação está definida do seguinte modo: dados $f, g \in S^{T^1}$,

$$(x)(fg) = (x)f(x)g,$$

para qualquer $x \in T^1$. Dados $t \in T^1$ e $f \in S^{T^1}$, definimos uma aplicação $t.f \in S^{T^1}$ do seguinte modo:

$$(x)(t.f) = (xt)f$$

para qualquer $x \in T^1$. Então a aplicação φ de T^1 em $\mathrm{End}^r(S^{T^1})$ definida por $(f)t\varphi = t.f$, para quaisquer $t \in T^1$ e $f \in S^{T^1}$, é um homomorfismo de monóides. Podemos assim considerar o produto semidirecto $S^{T^1} * T$ associado a φ, o qual designamos por *produto em coroa* de S e T e denotamos por $S \circ T$.

Os três lemas seguintes que optámos por incluir neste primeiro capítulo serão necessários no capítulo 4.

Lema 1.6.1. *Sejam T um monóide com zero que admite $T \setminus \{1\}$ como subsemigrupo, U_1 o submonóide $\{0,1\}$ de T e S um semigrupo. Seja $S * T$ um produto semidirecto tal que $t.s = 0.s$, para quaisquer $t \in T \setminus \{1\}$ e $s \in S$, e $S * U_1$ o produto semidirecto associado à restrição a U_1 da acção definida de T sobre S. Então, $S * T$ é isomorfo a um subsemigrupo de $(S * U_1) \times T$.*

Demonstração. Seja $\psi : S * T \to (S * U_1) \times T$ a aplicação definida por

$$(s,t)\psi = \begin{cases} ((s,1),1), & \text{se } t = 1 \\ ((s,0),t), & \text{se } t \neq 1. \end{cases}$$

Não há dúvida que ψ é uma aplicação injectiva. Seguidamente, mostramos que ψ é um homomorfismo de semigrupos. Tomemos $(s,t),(r,q) \in S * T$. Se $t = 1$ então

$$((s,1)(r,q))\psi = (s(1.r),q)\psi = (sr,q)\psi = \begin{cases} ((sr,1),1), & \text{se } q = 1 \\ ((sr,0),q), & \text{se } q \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ((s(1.r),1),1), & \text{se } q = 1 \\ ((s(1.r),0),q), & \text{se } q \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} ((s,1),1)((r,1),1), & \text{se } q = 1 \\ ((s,1),1)((r,0),q), & \text{se } q \neq 1 \end{cases} = (s,1)\psi(r,q)\psi.$$

Se $t \neq 1$ então $tq \neq 1$ e temos

$$((s,t)(r,q))\psi = (s(t.r),tq)\psi = (s(0.r),tq)\psi = ((s(0.r),0),tq)$$

$$= \begin{cases} ((s,0),t)((r,1),1), & \text{se } q = 1 \\ ((s,0),t)((r,0),q), & \text{se } q \neq 1 \end{cases} = (s,t)\psi(r,q)\psi,$$

como queríamos demonstrar. ∎

Nos dois resultados seguintes, uma cadeia C é também encarada como um semireticulado (em que, como usualmente, dados $x,y \in C$ o seu produto xy é o seu ínfimo em C). Observemos que os endomorfismos de uma cadeia C são exactamente as aplicações que respeitam a ordem $\leq$ de C, i.e. as aplicações $f : C \to C$ tais que se $x \leq y$ então $xf \leq yf$, para quaisquer $x,y \in C$. De facto, se $f \in \mathrm{End}(C)$ então, dados $x,y \in C$ tais que $x \leq y$, temos $xy = x$, donde $xfyf = (xy)f = xf$ e portanto $xf \leq yf$. Reciprocamente, suponhamos que $f : C \to C$ é uma aplicação que respeita a ordem. Então, dados $x,y \in C$, podemos supor sem perda de generalidade que $x \leq y$, pelo que $xf \leq yf$ e portanto $(xy)f = xf = xfyf$, donde $f \in \mathrm{End}(C)$. Assim, toda a acção definida de um semigrupo T sobre uma cadeia C respeita a ordem $\leq$ de C, i.e. se $t \in T$ e $x,y \in C$ são tais que $x \leq y$ então $t.x \leq t.y$.

Lema 1.6.2. *Sejam C uma cadeia finita, T um monóide com zero, $\varphi : T \to \mathrm{End}^r(C)$ um homomorfismo de monóides e $C * T$ o produto semidirecto associado a φ. Se $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0, 1\}$ e 0φ aplica pelo menos dois elementos distintos de C na identidade, então existem duas subcadeias C_1 e C_2 de C tais que $1 < |C_i| < |C|$, para $i = 1, 2$, e $C * T$ é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de $(C_1 * T) \times (C_2 * T)^0$, em que $C_1 * T$ e $C_2 * T$ são dois produtos semidirectos.*

Demonstração. Comecemos por observar que a partir da hipótese é imediato que C tem pelo menos dois elementos, donde $0 \neq 1$. Tomemos

$$C' = \{x \in C \mid 0.x = 0\} \quad \text{e} \quad C_2 = \{x \in C \mid 0.x = 1\}.$$

Não há dúvida que C' e C_2 são dois intervalos de C disjuntos (dados $x \in C'$ e $y \in C_2$, se $y \leq x$ teríamos $0.y \leq 0.x$, donde $1 \leq 0$, pelo que $x < y$) cuja união é C.

Tomemos $t \in T$, $x \in C_2$. Se $t.x \in C'$ então $0 = 0.(t.x) = (0t).x = 0.x = 1$, o que é um absurdo, pelo que $t.x \in C_2$. Logo, φ induz um homomorfismo de monóides de T em $\mathrm{End}^r(C_2)$. Por outro lado, tomemos $t \in T$ e $x \in C'$. Se $t.x \in C_2$ então $1 = 0.(t.x) = (0t).x = 0.x = 0$, o que é um absurdo, pelo que $t.x \in C'$. Seja $C_1 = C' \cup \{1\}$. Como $1 \in \mathrm{Im}(0\varphi)$ e 0φ respeita a ordem, então $0.1 = 1$. Além disso, dado $t \in T$, temos $t.1 = t.(0.1) = (t0).1 = 0.1 = 1$. Por conseguinte, φ induz também um homomorfismo de monóides de T em $\mathrm{End}^r(C_1)$. Consideremos então os produtos semidirectos $C_1 * T$ e $C_2 * T$ associados a estes homomorfismos de monóides.

Seguidamente, definimos uma aplicação ψ_1 de $C * T$ em $C_1 * T$ do seguinte modo:

$$(x,t)\psi_1 = \begin{cases} (1,t), & \text{se } x \in C_2 \\ (x,t), & \text{se } x \in C', \end{cases}$$

para qualquer $(x,t) \in C * T$, e uma aplicação ψ_2 de $C * T$ em $(C_2 * T)^0$ do seguinte modo:

$$(x,t)\psi_2 = \begin{cases} (x,t), & \text{se } x \in C_2 \\ 0, & \text{se } x \in C', \end{cases}$$

para qualquer $(x,t) \in C*T$. Tendo em conta que qualquer elemento de C' é menor que qualquer elemento de C_2 e que, dados $x, y \in C$ e $t \in T$, $x(t.y) \in C_2$ se e só se $x, y \in C_2$ (de facto, $0.(x(t.y)) = (0.x)(0.(t.y)) = (0.x)((0t).y) = (0.x)(0.y)$, pelo que $0.(x(t.y)) = 1$ se e só se $(0.x) = 1$ e $(0.y) = 1$), temos que ψ_1 e ψ_2 são dois homomorfismos. Além disso, ψ_1 é injectivo em $C' \times T$ e ψ_2 é injectivo em $C_2 * T$. Podemos então verificar que a aplicação $\psi : C * T \to (C_1 * T) \times (C_2 * T)^0$ definida por $(x,t)\psi = ((x,t)\psi_1, (x,t)\psi_2)$, para qualquer $(x,t) \in C * T$, é um homomorfismo injectivo.

Finalmente, uma vez que C é a união disjunta de C' com C_2, $|C_2| \geq 2$ (por hipótese), $|C_1| \geq 2$ (por construção) e C é finita, então também $|C_i| < |C|$, para $i = 1, 2$. O lema fica então provado. ■

Lema 1.6.3. *Sejam C uma cadeia finita, T um monóide com zero e $C*T$ um produto semidirecto. Se $0.e = e$, para certo $e \in C \setminus \{0,1\}$, então existem duas subcadeias C_1 e C_2 de C, com $1 < |C_i| < |C|$, para $i = 1, 2$, tais que $C * T$ é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de $(C_1 * T) \times (C_2 * T)$, em que $C_1 * T$ e $C_2 * T$ são dois produtos semidirectos.*

Demonstração. Consideremos os intervalos

$$C_1 = \{x \in C \mid x \leq e\} \quad \text{e} \quad C_2 = \{x \in C \mid e \leq x\}$$

de C. Observemos que decorre de imediato da hipótese que C tem pelo menos três elementos, donde $0 \neq 1$. Além disso, uma vez que $0, e \in C_1$, $1 \notin C_1$, $e, 1 \in C_2$, $0 \notin C_2$ e C é finita, então $1 < |C_i| < |C|$, para $i = 1, 2$. Por outro lado, dados $t \in T$ e $x \in C_1$, como $t.e = t.(0.e) = (t0).e = 0.e = e$, então $t.x \leq t.e = e$, pelo que $t.x \in C_1$. Analogamente, $t.x \in C_2$, para quaisquer $t \in T$ e $x \in C_2$. Por conseguinte, estão definidas, de um modo natural, acções de T sobre C_1 e de T sobre C_2. Sejam $C_1 * T$ e $C_2 * T$ os produtos semidirectos associados a estas acções.

Seguidamente, definimos uma aplicação ψ_1 de $C*T$ em C_1*T por $(x,t)\psi_1 = (xe, t)$, para qualquer $(x,t) \in C * T$. Sejam $(x,t), (y,q) \in C * T$. Então,

$$\begin{aligned} ((x,t)(y,q))\psi_1 &= (x(t.y), tq)\psi_1 = (x(t.y)e, tq) = (xe(t.y)e, tq) = (xe(t.y)(t.e), tq) \\ &= (xe(t.(ye)), tq) = (xe, t)(ye, q) = (x,t)\psi_1(y,q)\psi_1. \end{aligned}$$

Portanto, ψ_1 é um homomorfismo. Por outro lado, definimos uma aplicação ψ_2 de $C * T$ em $C_2 * T$ do modo seguinte:

$$(x,t)\psi_2 = \begin{cases} (e,t), & \text{se } x \in C_1 \\ (x,t), & \text{se } x \in C_2, \end{cases}$$

para qualquer $(x,t) \in C * T$. Tendo em conta que, dados $x, y \in C$ e $t \in T$, $x(t.y) \in C_2$ se e só se $x, y \in C_2$ temos que ψ_2 é também um homomorfismo. Uma vez que as restrições de ψ_1 a $C_1 \times T$ e de ψ_2 a $C_2 \times T$ são a identidade, então a aplicação $\psi : C*T \to (C_1*T) \times (C_2*T)$ definida por $(x,t)\psi = ((x,t)\psi_1, (x,t)\psi_2)$, para qualquer $(x,t) \in C * T$, é injectiva. Além disso, ψ é também um homomorfismo. O lema fica deste modo demonstrado. ■

7. Semigrupos livres e apresentações

Seja X um conjunto não vazio. Denotamos por X^+ o conjunto de todas as sequências não vazias de elementos de X. Em geral, representamos uma sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de X^+ (com $n \in \mathbb{N}$) justapondo ordenadamente os seus elementos: $a_1 a_2 \cdots a_n$. Deste modo, justifica-se a denominação usual de *alfabeto*, *letras* e *palavras* que é dada ao conjunto X, aos seus elementos e aos elementos de X^+, respectivamente. Em X^+ consideramos a operação binária definida do seguinte modo: dados $a_1 a_2 \cdots a_n, b_1 b_2 \cdots b_m \in X^+$,

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)(b_1 b_2 \cdots b_m) = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m.$$

Com esta operação (denominada *concatenação*), X^+ forma um semigrupo, designado por *semigrupo livre sobre* X. Se a X^+ juntarmos a sequência vazia (também designada, neste contexto, por *palavra vazia*), obtemos um monóide, designado por *monóide livre sobre* X e denotado por X^*. Esta denominação para X^* (tal como para X^+) deve-se à seguinte propriedade (universal): dados um monóide M e uma aplicação $f : X \to M$, existe um (único) homomorfismo de monóides $\varphi : X^* \to M$ que estende f, i.e. tal que $\iota\varphi = f$, onde ι denota a inclusão natural de X em X^*. Seja $w \in X^*$. Uma palavra u de X^* diz-se um *prefixo* (respectivamente, um *sufixo*) de w se existe $v \in X^*$ tal que $uv = w$ (respectivamente, $vu = w$).

Uma *apresentação de monóides* (aqui encaramos um monóide como uma *álgebra* do tipo $(2, 0)$) é um par ordenado $\langle X \mid R \rangle$, em que X é um alfabeto e R é um subconjunto de $X^* \times X^*$. Designamos um elemento (u, v) de $X^* \times X^*$ por *relação* e representamo-lo usualmente por $u = v$. Para evitar ambiguidade, dados $u, v \in X^*$, escrevemos $u \equiv v$, em vez de $u = v$, sempre que queiramos afirmar que u e v são exactamente a mesma palavra de X^*. Dizemos que um monóide M é *definido pela apresentação* $\langle X \mid R \rangle$ se M é isomorfo a X^*/ρ_R, em que ρ_R denota a menor congruência de X^* que contém R. Dizemos que uma relação $u = v$ $(u, v \in X^*)$ é uma *consequência* de R se $(u, v) \in \rho_R$. Sejam M um monóide e X um conjunto de geradores de M. Dados $u, v \in X^*$, dizemos que o conjunto de geradores X *satisfaz* a relação $u = v$ se $u\varphi = v\varphi$, onde φ denota o (único) homomorfismo (sobrejectivo) de X^* sobre M que estende a inclusão natural de X em M. Para mais detalhes veja-se [28] ou [42] (veja-se também [26]). Conceitos similares podem ser estabelecidos para semigrupos.

O seguinte resultado, adaptado para o caso dos monóides, pode ser encontrado em [42].

Proposição 1.7.1. *Sejam M um monóide gerado por um conjunto X e $R \subseteq X^* \times X^*$. Então $\langle X \mid R \rangle$ é uma apresentação para M se e só se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. *O conjunto de geradores X de M satisfaz todas as relações de R; e*

2. *se $u, v \in X^*$ são quaisquer duas palavras tais que X (como conjunto de geradores de M) satisfaz a relação $u = v$, então $u = v$ é uma consequência de R.* ■

O próximo resultado descreve o método "adivinhar e provar" usado frequentemente para determinar uma apresentação para um monóide finito.

Proposição 1.7.2. *Sejam M um monóide* finito, *X um conjunto de geradores de M, $R \subseteq X^* \times X^*$ um conjunto de relações e $W \subseteq X^*$. Admitamos que as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *O conjunto de geradores X de M satisfaz todas as relações de R;*

2. *Para qualquer palavra $w \in X^*$, existe uma palavra $w' \in W$ tal que a relação $w = w'$ é uma consequência de R;*

3. *$|W| \leq |M|$.*

Então, M é definido pela apresentação $\langle X \mid R \rangle$. ■

Sejam X um alfabeto, $R \subseteq X^* \times X^*$ um conjunto de relações e W um subconjunto de X^* contendo a palavra vazia tal que, para qualquer letra $x \in X$ e qualquer palavra $w \in W$, existe uma palavra $w' \in W$ tal que a relação $wx = w'$ é uma consequência de R. Então, W satisfaz a condição 2 da Proposição anterior. Um subconjunto W de X^* que satisfaz as condições da Proposição 1.7.2 diz-se um conjunto de *palavras reduzidas* para M.

Outro método para encontrar uma apresentação para um monóide consiste em aplicar transformações de Tietze. Este método requer, no entanto, que à partida seja conhecida uma apresentação para o monóide em causa e permite obter uma nova apresentação para o monóide. Dada uma apresentação de monóides $\langle X \mid R \rangle$, as *transformações de Tietze elementares* são:

(T1) Juntar uma nova relação $u = v$ a $\langle X \mid R \rangle$, desde que $u = v$ seja uma consequência de R;

(T2) Eliminar uma relação $(u = v) \in R$ de $\langle X \mid R \rangle$, desde que $u = v$ seja uma consequência de $R \setminus \{u = v\}$;

(T3) Juntar um novo símbolo b a X e juntar a $\langle X \mid R \rangle$ uma nova relação $b = w$, com $w \in X^*$;

(T4) Se $\langle X \mid R \rangle$ possui uma relação da forma $b = w$, com $b \in X$ e $w \in (X \setminus \{b\})^*$, eliminar b de X, eliminar a relação $b = w$ de $\langle X \mid R \rangle$ e substituir nas restantes relações de $\langle X \mid R \rangle$ todas as ocorrências de b por w.

Uma apresentação de monóides *finita* é uma apresentação com um número finito de símbolos geradores e com um número finito de relações. Temos, adaptado para monóides, o seguinte resultado (veja-se [42, Proposição 2.5]):

Proposição 1.7.3. *Duas apresentações finitas definem o mesmo monóide se e só se cada uma delas pode ser obtida a partir da outra aplicando transformações de Tietze elementares.* ■

8. Pseudovariedades

Uma *pseudovariedade de semigrupos* é uma classe de semigrupos finitos fechada para subsemigrupos, imagens homomorfas e produtos directos finitos. Uma *pseudovariedade de semigrupos inversos* é uma classe de semigrupos inversos finitos fechada para subsemigrupos inversos, imagens homomorfas e produtos directos finitos. Dada uma classe $\boldsymbol{C}$ de semigrupos finitos (respectivamente, de semigrupos inversos finitos), a menor pseudovariedade de semigrupos (respectivamente, de semigrupos inversos) que contém $\boldsymbol{C}$ é a classe $\boldsymbol{V(C)}$ (respectivamente, $\boldsymbol{V_{\mathrm{inv}}(C)}$) de todas as imagens homomorfas de subsemigrupos (respectivamente, de subsemigrupos inversos) de um produto directo finito de elementos de $\boldsymbol{C}$. Esta pseudovariedade de semigrupos (respectivamente, de semigrupos inversos) diz-se a pseudovariedade de semigrupos (respectivamente, de semigrupos inversos) *gerada* por $\boldsymbol{C}$. O *supremo* $\boldsymbol{V} \vee \boldsymbol{W}$ de duas pseudovariedades de semigrupos (respectivamente, de semigrupos inversos) $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ é a pseudovariedade de semigrupos (respectivamente, de semigrupos inversos) gerada por $\boldsymbol{V} \cup \boldsymbol{W}$. O *produto semidirecto* $\boldsymbol{V} * \boldsymbol{W}$ das pseudovariedades de semigrupos $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ é a pseudovariedade de semigrupos gerada por todos os produtos semidirectos $S * T$, com $S \in \boldsymbol{V}$ e $T \in \boldsymbol{W}$.

Nesta dissertação fazemos referência às seguintes pseudovariedades de semigrupos:

1. $\boldsymbol{S}$, a pseudovariedade de todos os semigrupos finitos;

2. $\boldsymbol{A}$, a pseudovariedade de todos os semigrupos aperiódicos finitos;

3. $\boldsymbol{J}$, a pseudovariedade de todos os semigrupos $\mathcal{J}$-triviais finitos;

4. $\boldsymbol{S\ell}$, a pseudovariedade de todos os semireticulados finitos;

5. $\boldsymbol{Ecom}$, a pseudovariedade de todos os semigrupos finitos cujos idempotentes comutam;

6. $\boldsymbol{G}$, a pseudovariedade de todos os grupos finitos;

7. $\boldsymbol{Ab}$, a pseudovariedade de todos os grupos abelianos finitos.

Denotamos por $\boldsymbol{Inv}$ a pseudovariedade de semigrupos inversos constituída por todos os semigrupos inversos finitos.

Dada uma classe $\boldsymbol{C}$ de semigrupos inversos finitos, faz sentido falar na pseudovariedade de semigrupos $\boldsymbol{V(C)}$ e na pseudovariedade de semigrupos inversos $\boldsymbol{V_{\mathrm{inv}}(C)}$, pelo que é natural procurarmos relacioná-las. É claro que $\boldsymbol{V_{\mathrm{inv}}(C)} \subseteq \boldsymbol{V(C)} \cap \boldsymbol{Inv}$. De facto, a inclusão recíproca é também verdadeira. Com o propósito de provar esta afirmação, começamos por demonstrar o seguinte lema:

Lema 1.8.1. *Sejam S um semigrupo finito cujos idempotentes comutam, T um semigrupo inverso e $\varphi : S \to T$ um homomorfismo sobrejectivo. Então existe um subsemigrupo inverso S' de S tal que $S'\varphi = T$.* ■

Demonstração. Seja $S' = \mathrm{Reg}(S)$. Como S é finito, $\mathrm{Reg}(S)$ é não vazio e portanto S' é um subsemigrupo inverso de S. Provemos que $S'\varphi = T$. Sejam $t \in T$ e J a $\mathcal{J}$-classe $\leq_{\mathcal{J}}$-mínima de S tal que $J\varphi = J_t$ (veja-se o Lema 1.3.3). Uma vez que J_t é regular, atendendo ao Lema 1.3.3, a $\mathcal{J}$-classe J é também regular, donde $t\varphi^{-1} \cap S' \neq \emptyset$. Portanto, $S'\varphi = T$, como queríamos demonstrar. ■

Tendo em conta o lema anterior, temos:

Proposição 1.8.2. *Seja $\boldsymbol{C}$ uma classe de semigrupos inversos finitos. Então temos $\boldsymbol{V_{\mathrm{inv}}(C)} = \boldsymbol{V(C)} \cap \boldsymbol{Inv}$.* ■

Uma *pseudovariedade de grupos* é uma classe de grupos finitos fechada para subgrupos, imagens homomorfas e produtos directos finitos. Notemos que qualquer pseudovariedade de grupos é também uma pseudovariedade de semigrupos. O resultado seguinte será usado no capítulo 4.

Proposição 1.8.3. *Sejam $\boldsymbol{C}$ uma classe de semigrupos e $\boldsymbol{H}$ uma pseudovariedade de grupos. Se os grupos dos elementos de $\boldsymbol{C}$ pertencem a $\boldsymbol{H}$, então $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{C}) \cap \boldsymbol{G} \subseteq \boldsymbol{H}$.*

Demonstração. Seja G um grupo pertencente a $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{C})$. Então, existem semigrupos $S_1, \ldots, S_n \in \boldsymbol{C}$ ($n \in \mathbb{N}$), um subsemigrupo T de $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ e um homomorfismo sobrejectivo $\varphi : T \to G$. Pela Proposição 1.1.3, existe um grupo H de T tal que a restrição de φ a H é um homomorfismo sobrejectivo de H sobre G. Para demonstrar o resultado basta agora provar que $H \in \boldsymbol{H}$. Uma vez que H é um grupo de S, então H está contido numa $\mathcal{H}$-classe H_e, com e um idempotente de S. Sendo $e = (e_1, \ldots, e_n)$, temos $e_i \in E(S_i)$, para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$, e $H_e = H_{e_1} \times \cdots \times H_{e_n}$. Por hipótese cada H_{e_i} pertence a $\boldsymbol{H}$ e portanto $H_e \in \boldsymbol{H}$, pelo que $H \in \boldsymbol{H}$, como queríamos demonstrar. ■

Seja $\boldsymbol{V}$ uma pseudovariedade de semigrupos (respectivamente, de semigrupos inversos) arbitrária.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma *operação implícita n-ária* sobre $\boldsymbol{V}$ é uma família $\pi = (\pi_S)_{S \in \boldsymbol{V}}$ tal que:

1. Para qualquer semigrupo (respectivamente, semigrupo inverso) finito S, π_S é uma aplicação de S^n em S ; e

2. π *comuta* com qualquer homomorfismo entre elementos de $\boldsymbol{V}$, i.e. para qualquer homomorfismo $\varphi : S \to T$ entre dois semigrupos (respectivamente, semigrupos inversos) finitos S e T de $\boldsymbol{V}$,

$$(s_1, \ldots, s_n)\pi_S\varphi = (s_1\varphi, \ldots, s_n\varphi)\pi_T,$$

   para quaisquer $s_1, \ldots, s_n \in S$.

É claro que a multiplicação em cada semigrupo (respectivamente, semigrupo inverso) finito define uma operação implícita binária sobre $\boldsymbol{V}$. Uma operação implícita unária sobre $\boldsymbol{V}$ de importância fundamental no estudo das pseudovariedades de semigrupos (respectivamente, de semigrupos inversos) é a que a cada elemento s de cada semigrupo (respectivamente, semigrupo inverso) finito $S \in \boldsymbol{V}$ faz corresponder a sua única potência idempotente. Este idempotente é usualmente denotado por s^ω. Quando $\boldsymbol{V}$ é uma pseudovariedade de semigrupos inversos, está definida outra operação implícita unária natural sobre $\boldsymbol{V}$ que a cada elemento s de cada semigrupo inverso finito $S \in \boldsymbol{V}$ faz corresponder o seu inverso s^{-1}.

Uma *pseudoidentidade* para $\boldsymbol{V}$ é um par (π, ρ), em que π e ρ são, para algum $n \in \mathbb{N}$, duas operações implícitas n-árias sobre $\boldsymbol{V}$. Uma pseudoidentidade (π, ρ) é usualmente denotada por $\pi = \rho$. Dizemos que $S \in \boldsymbol{V}$ *satisfaz* a pseudoidentidade $\pi = \rho$ se as aplicações π_S e ρ_S coincidem. Seja Σ um conjunto de pseudoidentidades para $\boldsymbol{V}$. Dizemos que uma subclasse $\boldsymbol{W}$ de $\boldsymbol{V}$ é *definida* por Σ se $\boldsymbol{W}$ for constituída por todos os elementos de $\boldsymbol{V}$ que satisfazem todas as pseudoidentidades de Σ. Neste caso, dizemos também que Σ é uma *base* de $\boldsymbol{W}$. Observemos que uma subclasse de $\boldsymbol{V}$ definida por um conjunto de pseudoidentidades para $\boldsymbol{V}$ é uma pseudovariedade. Mais ainda, é válido o seguinte resultado de Reiterman, análogo ao Teorema de Birkhoff para *variedades* de álgebras universais (veja-se [2, Teorema 3.5.1]):

Teorema 1.8.4. *Seja $\boldsymbol{W}$ uma subclasse de uma pseudovariedade $\boldsymbol{V}$. Então, $\boldsymbol{W}$ é uma pseudovariedade se e só se $\boldsymbol{W}$ é definida por algum conjunto de pseudoidentidades para $\boldsymbol{V}$.* ∎

Os conceitos de operação implícita e pseudoidentidade podem ser formulados mais geralmente para pseudovariedades de álgebras finitas quaisquer, não necessariamente semigrupos ou semigrupos inversos. O resultado anterior é válido para uma pseudovariedade de álgebras qualquer. Para mais detalhes veja-se [2, Capítulo 3].

Neste trabalho, consideramos apenas operações implícitas sobre a pseudovariedade de semigrupos $\boldsymbol{S}$ ou, no caso dos semigrupos inversos, sobre a pseudovariedade de semigrupos inversos $\boldsymbol{Inv}$. Referimo-nos às pseudoidentidades para $\boldsymbol{S}$ ou, no caso dos semigrupos inversos, para $\boldsymbol{Inv}$ simplesmente por *pseudoidentidades*. Dizemos que uma pseudovariedade é *finitamente baseada* se for definida por algum conjunto finito de pseudoidentidades. Dizemos que uma pseudovariedade é *decidível* se existir um algoritmo que permita testar se um dado semigrupo finito lhe pertence ou não.

Capítulo 2

O monóide das transformações parciais injectivas e crescentes sobre uma cadeia finita

Neste capítulo estudamos o monóide $\mathcal{POI}_n$, das transformações parciais injectivas e crescentes sobre uma cadeia com n elementos ($n \in \mathbb{N}$), do ponto de vista estrutural. Na primeira secção, mostramos que $\mathcal{POI}_n$ é um submonóide inverso de $\mathcal{I}(X_n)$, calculamos o seu cardinal e apresentamos uma descrição para as relações de Green. Na secção 2, exibimos descrições para os ideais e para as congruências de $\mathcal{POI}_n$. A característica de $\mathcal{POI}_n$ é determinada na terceira secção e, na secção 4, estabelecemos uma apresentação para os monóides $\mathcal{POI}_n$ (com $n \in \mathbb{N}$). O método que seguimos ("adivinhar e provar"[42]) consiste em encontrar um par (X, R) que satisfaça as condições da Proposição 1.7.2. Começámos pois por determinar um conjunto de geradores para os monóides $\mathcal{POI}_n$ (com $n \geq 1$) que apresentamos na secção 3. Seguidamente, tomámos como modelos os monóides $\mathcal{POI}_n$, com $n \in \{1, \ldots, 6\}$, e usámos o programa de J.-E. Pin "Semigroupe"[37] (veja-se também [17], onde são descritos os algoritmos utilizados por este programa) para encontrar um conjunto de relações que fossem satisfeitas pelos geradores determinados. Para este efeito também podíamos usar o programa de D. McAlister [31]. Na realidade, estes programas forneceram-nos uma apresentação para o monóide em causa, embora com um número excessivo de relações, muitas das quais concluímos serem supérfluas. No passo seguinte, seleccionámos um subconjunto conveniente de relações que ainda fosse suficiente para definir o monóide. Esta escolha efectuou-se refinando várias vezes a escolha inicial: e.g. para $n = 6$ o programa [37] (ou [31]) deu-nos 444 relações, das quais, na nossa escolha final, apenas considerámos 31. Nesta etapa usámos o programa GAP [43, 30, 36]. Finalmente, generalizámos os resultados encontrados para $n \in \{1, \ldots, 6\}$ a um inteiro positivo arbitrário, completando assim a fase "adivinhar". Nesta dissertação, expomos a fase "provar"do método em causa.

1. O monóide $\mathcal{POI}_n$

Seja $X_n = \{1 < 2 < \cdots < n\}$ uma cadeia com n elementos. Dizemos que uma transformação s de $\mathcal{PT}(X_n)$ é *crescente* se, para quaisquer $x, y \in \mathrm{Dom}(s)$, $x \leq y$ implica $xs \leq ys$. Denotamos por $\mathcal{PO}_n$ o subconjunto de $\mathcal{PT}(X_n)$ formado por todas as transformações parciais crescentes, por $\mathcal{O}_n$ o subconjunto de $\mathcal{T}(X_n)$ cujos elementos são as transformações totais crescentes e, finalmente, por $\mathcal{POI}_n$ o subconjunto de $\mathcal{I}(X_n)$ das transformações parciais injectivas e crescentes, i.e.

$$\mathcal{POI}_n = \{s \in \mathcal{I}(X_n) \mid \text{para quaisquer } x, y \in \mathrm{Dom}(s),\ x < y \text{ implica } xs < ys\}.$$

Temos que $\mathcal{PO}_n$, $\mathcal{O}_n$ e $\mathcal{POI}_n$ são submonoídes de $\mathcal{PT}(X_n)$. De agora em diante neste capítulo concentramos a nossa atenção no estudo dos monóides $\mathcal{POI}_n$, com $n \in N$.

Lema 2.1.1. *Dois elementos de $\mathcal{POI}_n$ são iguais se e só se têm o mesmo domínio e a mesma imagem.*

Demonstração. Seja $s \in \mathcal{POI}_n$. Se $\mathrm{Dom}(s) = \emptyset$ então s é a transformação vazia, donde s é a única transformação com o domínio considerado. Suponhamos pois que $|\,\mathrm{Dom}(s)| = k \geq 1$. Sejam

$$\mathrm{Dom}(s) = \{i_1 < \cdots < i_k\} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(s) = \{j_1 < \cdots < j_k\}.$$

Então, $\mathrm{Im}(s) = \{i_1 s < \cdots < i_k s\}$, pelo que $i_\ell s = j_\ell$, para qualquer $\ell \in \{1, \ldots, k\}$. Portanto s é a única transformação de $\mathcal{POI}_n$ com o domínio e a imagem considerados. O lema fica assim demonstrado. ∎

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, é conhecida a cardinalidade do monóide $\mathcal{O}_n$ (veja-se e.g. [21]):

$$|\mathcal{O}_n| = \binom{2n-1}{n-1} = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

Para $\mathcal{POI}_n$ temos o seguinte resultado:

Proposição 2.1.2. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $|\mathcal{POI}_n| = \binom{2n}{n} = 2|\mathcal{O}_n|$.*

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, definimos

$$J_k = \{s \in \mathcal{POI}_n \mid |\,\mathrm{Dom}(s)| = k\}$$

e $\mathcal{X}_k = \{X \in \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}) \mid |X| = k\}$. Observemos que, dado $s \in \mathcal{POI}_n$, $|\,\mathrm{Dom}(s)| = |\,\mathrm{Im}(s)|$. Logo $J_k = \{s \in \mathcal{POI}_n \mid |\,\mathrm{Im}(s)| = k\}$, para qualquer $k \in \{0, \ldots, n\}$. Tomemos $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e consideremos a aplicação

$$f_k : J_k \to \mathcal{X}_k \times \mathcal{X}_k$$

definida por: para qualquer $s \in J_k$, $f_k(s) = (\mathrm{Dom}(s), \mathrm{Im}(s))$. Então f_k é sobrejectiva e, por outro lado, atendendo ao Lema 2.1.1, f_k é também injectiva. Logo, $|J_k| = |\mathcal{X}_k|^2 = \binom{n}{k}^2$, pelo que $|\mathcal{POI}_n| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = 2|\mathcal{O}_n|$. ■

Vimos no Exemplo 1.4.1 que os idempotentes de $\mathcal{I}(X_n)$ são todas as identidades parciais sobre X_n. Uma vez que tais transformações são crescentes, concluímos que $E(\mathcal{POI}_n) = E(\mathcal{I}(X_n))$, i.e. os idempotentes de $\mathcal{POI}_n$ são exactamente todos os elementos $s \in \mathcal{POI}_n$ tais que $\mathrm{Dom}(s) = \mathrm{Im}(s)$, os quais são em número de 2^n. Por outro lado, dado $s \in \mathcal{POI}_n$, a transformação inversa de s (o inverso de s em $\mathcal{I}(X_n)$) é ainda uma transformação crescente. Temos então:

Proposição 2.1.3. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{POI}_n$ é um submonóide inverso de $\mathcal{I}(X_n)$.* ■

O próximo resultado dá-nos uma descrição das relações de Green em $\mathcal{POI}_n$.

Proposição 2.1.4. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $s, t \in \mathcal{POI}_n$. Então:*

1. *$s \mathcal{R} t$ se e só se $\mathrm{Dom}(s) = \mathrm{Dom}(t)$;*
2. *$s \mathcal{L} t$ se e só se $\mathrm{Im}(s) = \mathrm{Im}(t)$;*
3. *$s \mathcal{H} t$ se e só se $s = t$;*
4. *$s \leq_{\mathcal{J}} t$ se e só se $|\mathrm{Im}(s)| \leq |\mathrm{Im}(t)|$. Além disso, $s \mathcal{J} t$ se e só se $|\mathrm{Im}(s)| = |\mathrm{Im}(t)|$*

Demonstração. As duas primeiras propriedades são uma consequência imediata das Proposições 1.3.1 e 1.3.11. A terceira resulta de imediato das duas primeiras e do Lema 2.1.1. Resta-nos assim demonstrar a quarta propriedade. Com este objectivo, tomemos $s, t \in \mathcal{POI}_n$. Primeiramente, suponhamos que $|\mathrm{Im}(s)| \leq |\mathrm{Im}(t)|$. Sejam $k = |\mathrm{Im}(s)|$ e X um subconjunto de $\mathrm{Im}(t)$ com k elementos. Seja u o elemento de $\mathcal{POI}_n$ definido por $\mathrm{Dom}(u) = \mathrm{Im}(s)$ e $\mathrm{Im}(u) = X$. Então $s = sut^{-1}tu^{-1}$, pelo que $s \leq_{\mathcal{J}} t$. Reciprocamente, suponhamos que $s \leq_{\mathcal{J}} t$. Então, $s = utv$, para certos $u, v \in \mathcal{POI}_n$ e portanto $|\mathrm{Im}(s)| \leq |\mathrm{Im}(tv)| = |(\mathrm{Im}(t))v| \leq |\mathrm{Im}(t)|$. ■

A partir do resultado anterior, podemos concluir que $\mathcal{POI}_n$ é um monóide aperiódico. Além disso, podemos ainda deduzir que

$$\mathcal{POI}_n/\mathcal{J} = \{J_0 <_{\mathcal{J}} J_1 <_{\mathcal{J}} \cdots <_{\mathcal{J}} J_n\},$$

em que $J_k = \{s \in \mathcal{POI}_n \mid |\operatorname{Im}(s)| = k\}$, para qualquer $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Tal como outras famílias de monóides de transformações (por exemplo, a família $\mathcal{O}_n$, com $n \in \mathbb{N}$), os monóides $\mathcal{POI}_n$, com $n \in \mathbb{N}$, gozam da seguinte propriedade (vejam-se [38, 45, 22]):

Proposição 2.1.5. *Para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$ o produto directo $\mathcal{POI}_n \times \mathcal{POI}_m$ é a menos de um isomorfismo um submonóide de $\mathcal{POI}_{n+m}$.*

Demonstração. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Dado um subconjunto X de $\{1, \ldots, m\}$, denotemos por $n + X$ o subconjunto $\{n + x \mid x \in X\}$ de $\{n + 1, \ldots, n + m\}$. Tomemos $s \in \mathcal{POI}_n$ e $t \in \mathcal{POI}_m$. Definimos uma transformação parcial $\theta_{s,t}$ sobre a cadeia $X_{n+m} = \{1 < \cdots < n < n + 1 < \cdots < n + m\}$ do seguinte modo:

$$\operatorname{Dom}(\theta_{s,t}) = \operatorname{Dom}(s) \ \dot{\cup} \ (n + \operatorname{Dom}(t))$$

e, para qualquer $k \in \operatorname{Dom}(\theta_{s,t})$,

$$k\theta_{s,t} = \begin{cases} ks, & \text{se } k \in \operatorname{Dom}(s) \\ (k - n)t + n, & \text{se } k \in n + \operatorname{Dom}(t). \end{cases}$$

Então $\theta_{s,t} \in \mathcal{POI}_{n+m}$ e a aplicação

$$\varphi : \mathcal{POI}_n \times \mathcal{POI}_m \to \mathcal{POI}_{n+m}$$

definida por $(s, t)\varphi = \theta_{s,t}$, para quaisquer $s \in \mathcal{POI}_n$ e $t \in \mathcal{POI}_m$, é um homomorfismo injectivo de monóides, pelo que o resultado fica provado. ∎

2. Os ideais e as congruências de $\mathcal{POI}_n$

O nosso objectivo nesta secção é apresentar uma descrição dos ideais e das congruências dos monóides $\mathcal{POI}_n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Denotemos por 0 o zero do monóide $\mathcal{POI}_n$. Como $(\mathcal{POI}_n/\mathcal{J}, \leq_{\mathcal{J}})$ é uma cadeia com $n+1$ elementos, atendendo à Proposição 1.3.13, temos de imediato o seguinte resultado:

Teorema 2.2.1. *O monóide $\mathcal{POI}_n$ possui $n+1$ ideais, os quais são ideais principais. Mais precisamente, os ideais de $\mathcal{POI}_n$ são os subconjuntos da forma*

$$I_k = \{s \in \mathcal{POI}_n \mid 0 \leq |\operatorname{Im}(s)| \leq k\},$$

com $k \in \{0, \ldots, n\}$, tendo-se $\{0\} = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n = \mathcal{POI}_n$. ∎

Antes de darmos uma descrição das congruências de $\mathcal{POI}_n$, precisamos estabelecer dois lemas. Recordemos que os idempotentes de $\mathcal{POI}_n$ são exactamente as identidades parciais de X_n, tendo-se $e < f$ se e só se $\mathrm{Dom}(e) \subset \mathrm{Dom}(f)$, para quaisquer idempotentes e e f de $\mathcal{POI}_n$.

Lema 2.2.2. *Sejam ρ uma congruência de $\mathcal{POI}_n$ e e um idempotente de $\mathcal{POI}_n$. Se existe um idempotente f de $\mathcal{POI}_n$ tal que $f < e$ e $e \,\rho\, f$, então $e \,\rho\, 0$.*

Demonstração. Seja g um idempotente tal que $g \leq e$ e $g \,\rho\, e$, com $|\,\mathrm{Dom}(g)|$ mínimo. Como $|\,\mathrm{Dom}(g)| \leq |\,\mathrm{Dom}(f)| < |\,\mathrm{Dom}(e)|$, existe $x \in \mathrm{Dom}(e)$ tal que $x \notin \mathrm{Dom}(g)$. Admitamos que $\mathrm{Dom}(g) \neq \emptyset$. Tomemos $y \in \mathrm{Dom}(g)$ e seja $X = (\mathrm{Dom}(g) \setminus \{y\}) \cup \{x\}$. Notemos que $|X| = |\,\mathrm{Dom}(g)|$. Seja s o elemento de $\mathcal{POI}_n$ definido por $\mathrm{Dom}(s) = \mathrm{Dom}(g)$ e $\mathrm{Im}(s) = X$. Como $X \subset \mathrm{Dom}(e)$, é claro que $ses^{-1} = g$. Por outro lado, sgs^{-1} é o idempotente de $\mathcal{POI}_n$ de domínio $\mathrm{Dom}(g) \setminus \{xs^{-1}\}$ (uma vez que $x \notin \mathrm{Dom}(g)$ e $X \setminus \{x\} \subset \mathrm{Dom}(g)$) e $e \,\rho\, g = ses^{-1} \,\rho\, sgs^{-1}$. Ora, $sgs^{-1} \leq e$ e $|\,\mathrm{Dom}(sgs^{-1})| < |\,\mathrm{Dom}(g)|$, contra a hipótese. Logo $\mathrm{Dom}(g) = \emptyset$, donde $g = 0$ e portanto $e \,\rho\, 0$. ∎

Lema 2.2.3. *Seja ρ uma congruência de $\mathcal{POI}_n$ e $s \in \mathcal{POI}_n$. Se existe $t \in \mathcal{POI}_n$ tal que $t \neq s$ e $s \,\rho\, t$, então $s \,\rho\, 0$.*

Demonstração. Em primeiro lugar, suponhamos que $s = s^2$ e existe t pertencente a $E(\mathcal{POI}_n)$ tal que $t \neq s$ e $s \,\rho\, t$. Logo, $s = s^2 \,\rho\, st$ e $st \leq s$. Se $st < s$, pelo Lema 2.2.2, temos $s \,\rho\, 0$. Se $st = s$ então $s < t$ e portanto, pelo Lema 2.2.2, temos $t \,\rho\, 0$, donde $s \,\rho\, 0$. Assim, provámos o lema para o caso em que s é um idempotente. Em seguida, consideremos $s \in \mathcal{POI}_n$ arbitrário e suponhamos que $t \in \mathcal{POI}_n$ é tal que $t \neq s$ e $s \,\rho\, t$. Como $\mathcal{POI}_n$ é um monóide inverso, temos $s^{-1} \rho\, t^{-1}$ (Proposição 1.4.3), donde $s^{-1}s \,\rho\, t^{-1}t$ e $ss^{-1} \rho\, tt^{-1}$. Se $s^{-1}s = t^{-1}t$ e $ss^{-1} = tt^{-1}$ então $s \,\mathcal{H}\, t$, donde $s = t$, visto que $\mathcal{POI}_n$ é aperiódico. Consequentemente, $s^{-1}s \neq t^{-1}t$ ou $ss^{-1} \neq tt^{-1}$ e portanto, aplicando o caso já estudado para os idempotentes, temos $s^{-1}s \,\rho\, 0$ ou $ss^{-1} \rho\, 0$, respectivamente. Logo, $s \,\rho\, 0$. ∎

Podemos agora apresentar a seguinte descrição das congruências de $\mathcal{POI}_n$.

Teorema 2.2.4. *As congruências de $\mathcal{POI}_n$ são exactamente as $n+1$ congruências de Rees.*

Demonstração. Utilizemos a notação do Teorema 2.2.1. Consideremos ρ_k como sendo a congruência de Rees associada ao ideal I_k, para qualquer $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Seja ρ uma congruência de $\mathcal{POI}_n$ e tomemos $X_\rho = \{s \in \mathcal{POI}_n \mid |s\rho| > 1\}$. Se $X_\rho = \emptyset$ então ρ é a identidade e portanto $\rho = \rho_0$. Suponhamos que $X_\rho \neq \emptyset$ e seja $k = \max\{|\operatorname{Im}(s)| \mid s \in X_\rho\}$. Observemos que $k \geq 1$. Seja $s \in X_\rho$ tal que $|\operatorname{Im}(s)| = k$. Então, pelo Lema 2.2.3, $s\,\rho\,0$. Consequentemente, $s_1ss_2\,\rho\,0$, para quaisquer $s_1, s_2 \in \mathcal{POI}_n$, e portanto, como I_k é o ideal gerado por s (veja-se a Proposição 1.3.13), temos $I_k \subseteq 0\rho$. Por outro lado, se $s \in 0\rho$ então $s = 0$, donde $s \in I_k$, ou $s \neq 0$, donde $s \in X_\rho$, pelo que $|\operatorname{Im}(s)| \leq k$ e portanto $s \in I_k$. Logo $0\rho = I_k$. Seguidamente, tomemos $s \in \mathcal{POI}_n$ tal que $s \notin I_k$. Então $|\operatorname{Im}(s)| > k$ e portanto $s \notin X_\rho$, pelo que $s\rho = \{s\}$. Por conseguinte, ρ é a congruência de Rees associada ao ideal I_k. ∎

3. A característica de $\mathcal{POI}_n$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Seja J_k a $\mathcal{J}$-classe de $\mathcal{POI}_n$ constituída pelas transformações de $\mathcal{POI}_n$ de característica k, para qualquer $0 \leq k \leq n$. Observemos que $J_0 = \{0\}$ e $J_n = \{1\}$. Antes de estabelecermos a característica de $\mathcal{POI}_n$, provamos o seguinte lema:

Lema 2.3.1. *O monóide $\mathcal{POI}_n$ é gerado por J_{n-1}.*

Demonstração. Seja M o submonóide de $\mathcal{POI}_n$ gerado por J_{n-1}. É claro que M contém $J_n = \{1\}$. Para obtermos o resultado pretendido basta provar que, para cada $k \leq n-2$, todo o elemento de J_k é produto de elementos de J_{k+1}. Em primeiro lugar, tomemos um idempotente e de J_k. Como $k \leq n-2$, então podemos escolher dois inteiros distintos k_1 e k_2 não pertencentes a $\operatorname{Dom}(e)$. Definimos dois elementos (idempotentes) e_1 e e_2 de $\mathcal{POI}_n$ por $\operatorname{Dom}(e_i) = \operatorname{Im}(e_i) = \operatorname{Dom}(e) \cup \{k_i\}$, com $i = 1, 2$. É claro que $e_1, e_2 \in J_{k+1}$ e $e = e_1e_2$. Mostrámos pois que cada idempotente de J_k é produto de dois idempotentes de J_{k+1}. No próximo passo tomamos um elemento $s \in J_k$ tal que $\operatorname{Dom}(s) = \{1, \ldots, k\}$. Se $ks < n$ definimos s_1 e s_2 em $\mathcal{POI}_n$ do seguinte modo: $\operatorname{Dom}(s_1) = \operatorname{Dom}(s) \cup \{n\}$, $\operatorname{Im}(s_1) = \operatorname{Im}(s) \cup \{n\}$ e $\operatorname{Dom}(s_2) = \operatorname{Im}(s_2) = \operatorname{Im}(s)$. Então $s_1 \in J_{k+1}$, $s_2 \in J_k$ e $s = s_1s_2$. Como s_2 é um idempotente de J_k, já sabemos que existem $e_1, e_2 \in J_{k+1}$ tais que $s_2 = e_1e_2$ e portanto s é produto de três elementos de J_{k+1}. Suponhamos agora que $ks = n$. Seja p o menor inteiro de $\{1, \ldots, k\}$ tal que $ps \neq p$ (notemos que p existe pois $ks \neq k$) e sejam

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p-1 & p & p+1 & \cdots & k & k+1 \\ 1 & \cdots & p-1 & p+1 & p+2 & \cdots & k+1 & k+2 \end{pmatrix}$$

e

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p-1 & p & p+1 & \cdots & k & k+1 \\ 1 & \cdots & p-1 & p & ps & \cdots & (k-1)s & ks \end{pmatrix}.$$

É claro que $s_1, s_2 \in J_{k+1}$ (observemos que $(p-1)s = p-1$ e $ps > p$, pelo que s_2 pertence de facto a $\mathcal{POI}_n$) e $s = s_1 s_2$. Em seguida, consideremos um elemento $s \in J_k$ tal que $\mathrm{Im}(s) = \{1, \ldots, k\}$. Então $s^{-1} \in J_k$ e $\mathrm{Dom}(s^{-1}) = \{1, \ldots, k\}$. Pelo caso anterior, $s^{-1} = s_1 e_1 e_2$, para alguns $s_1, e_1, e_2 \in J_{k+1}$, ou $s^{-1} = s_1 s_2$, para alguns $s_1, s_2 \in J_{k+1}$. Logo, $s = e_2^{-1} e_1^{-1} s_1^{-1}$, com $s_1^{-1}, e_1^{-1}, e_2^{-1} \in J_{k+1}$, ou $s = s_2^{-1} s_1^{-1}$, com $s_1^{-1}, s_2^{-1} \in J_{k+1}$. Finalmente, resta-nos considerar um elemento arbitrário s de J_k. Definimos $s_1, s_2 \in J_k$ do seguinte modo: $\mathrm{Dom}(s_1) = \mathrm{Dom}(s)$, $\mathrm{Im}(s_1) = \{1, \ldots, k\} = \mathrm{Dom}(s_2)$ e $\mathrm{Im}(s_2) = \mathrm{Im}(s)$. Então $s = s_1 s_2$. Uma vez que $\mathrm{Im}(s_1) = \{1, \ldots, k\} = \mathrm{Dom}(s_2)$, como acabámos de provar s_1 e s_2 são produto de elementos de J_{k+1}, pelo que s é também produto de elementos de J_{k+1}, ficando assim concluída a demonstração. ∎

Consideremos os elementos $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ de $\mathcal{POI}_n$ definidos do seguinte modo:

1. $\mathrm{Dom}(g_0) = \{2, \ldots, n\}$ e $yg_0 = y - 1$, para qualquer $y \in \mathrm{Dom}(g_0)$, i.e.

$$g_0 = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix};$$

2. Para $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $\mathrm{Dom}(g_i) = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{n-i+1\}$ e

$$yg_i = \begin{cases} y, & y \in \mathrm{Dom}(g_i) \setminus \{n-i\} \\ y+1, & y = n-i, \end{cases}$$

i.e.

$$g_i = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & \cdots & n-i-1 & n-i & n-i+2 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & n-i-1 & n-i+1 & n-i+2 & \cdots & n \end{array}\right).$$

Teorema 2.3.2. *Seja $A = \{g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}\}$. Então, A é um conjunto de geradores do monóide $\mathcal{POI}_n$. Além disso, $\mathcal{POI}_n$ tem característica n.*

Demonstração. Em primeiro lugar, mostramos que A é um conjunto de geradores de $\mathcal{POI}_n$. Para isso, atendendo ao Lema 2.3.1, basta mostrar que cada elemento de J_{n-1} pode ser escrito como produto de elementos de A. Seja $D_i = \mathrm{Dom}(g_i)$, com $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Tomemos $s \in J_{n-1}$. Uma vez que $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$ são exactamente todos os subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com $n-1$ elementos, então existem $i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tais que $\mathrm{Dom}(s) = D_i$ e $\mathrm{Im}(s) = D_j$. Por outro lado, como $\mathrm{Im}(g_i) = D_{i+1}$, para qualquer $i = 0, 1, \ldots, n-2$, e $\mathrm{Im}(g_{n-1}) = D_0$, temos que $s = g_i \cdots g_{j-1}$, se $i < j$, e $s = g_i g_{i+1} \cdots g_{n-1} g_0 \cdots g_{j-1}$, se $i \geq j$. Então, A é um conjunto de geradores do monóide $\mathcal{POI}_n$.

Em seguida, mostramos que qualquer conjunto de geradores de $\mathcal{POI}_n$ possui pelo menos n elementos. Seja B um conjunto de geradores de $\mathcal{POI}_n$. Observemos que, para provar que $|B| \geq n$, é suficiente mostrar que, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, existe $t \in B$ tal que $\mathrm{Dom}(t) = D_i$. Com efeito, tomemos $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ e sejam $t_1, \ldots, t_m \in B \setminus \{1\}$ ($m \in \mathbb{N}$) tais que $g_i = t_1 \cdots t_m$. Então $D_i = \mathrm{Dom}(g_i) \subseteq \mathrm{Dom}(t_1)$. Como $g_i \in J_{n-1}$ e $t_1 \neq 1$ então $t_1 \in J_{n-1}$, pelo que $|\mathrm{Dom}(t_1)| = n-1$ e portanto $D_i = \mathrm{Dom}(t_1)$. ■

4. Uma apresentação para $\mathcal{POI}_n$

Temos por objectivo principal nesta secção estabelecer uma apresentação para os monóides $\mathcal{POI}_n$ (com $n \geq 1$). O método que seguimos consiste em encontrar um par (X, R) que satisfaça as condições da Proposição 1.7.2.

Começamos por apresentar o nosso conjunto de relações. Consideremos n letras $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ ($n \geq 1$). Seja $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$.

De agora em diante usamos a seguinte convenção: dados $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$, se $i \leq j$ a expressão $x_i \cdots x_j$ representa a palavra de comprimento $j - i + 1$ sobre o alfabeto X cuja letra na posição $p \in \{1, \ldots, j-i+1\}$ é x_{i+p-1} (i.e. os índices das suas letras estão ordenados de acordo com a ordem usual e são consecutivos), caso contrário, i.e. se $j < i$, a expressão $x_i \cdots x_j$ representa a palavra vazia. Por exemplo, neste contexto a expressão $x_3 \cdots x_2$ denota a palavra vazia e **não** a palavra $x_3 x_2$.

Consideremos os seguintes conjuntos de relações:

(R_1) $x_i x_0 = x_0 x_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-2$;

(R_2) $x_j x_i = x_i x_j$, $2 \leq i+1 < j \leq n-1$;

(R_3) $x_0^2 x_1 = x_0^2 = x_{n-1} x_0^2$;

(R_4) $x_{i+1} x_i x_{i+1} = x_{i+1} x_i = x_i x_{i+1} x_i$, $1 \leq i \leq n-2$;

(R_5) $x_i x_{i+1} \cdots x_{n-1} x_0 x_1 \cdots x_{i-1} x_i = x_i$, $0 \leq i \leq n-1$;

(R_6) $x_{i+1} \cdots x_{n-1} x_0 x_1 \cdots x_{i-1} x_i^2 = x_i^2$, $1 \leq i \leq n-1$.

Denotamos também a relação $x_0^2 x_1 = x_0^2$ por $\mathrm{R}_{3\mathrm{a}}$, a relação $x_{n-1} x_0^2 = x_0^2$ por $\mathrm{R}_{3\mathrm{b}}$, as relações $x_{i+1} x_i x_{i+1} = x_{i+1} x_i$, $1 \leq i \leq n-2$, por $\mathrm{R}_{4\mathrm{a}}$ e as relações $x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i$, $1 \leq i \leq n-2$, por $\mathrm{R}_{4\mathrm{b}}$. Seja

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_1 \cup \mathrm{R}_2 \cup \mathrm{R}_3 \cup \mathrm{R}_4 \cup \mathrm{R}_5 \cup \mathrm{R}_6.$$

Então R é constituído por $\frac{1}{2}(n^2 + 5n - 4)$ relações.

Exemplos 2.4.1. **1.** O monóide $\mathcal{POI}_1$ é (a menos de um isomorfismo) o semireticulado $U_1 = \{0, 1\}$ (i.e. o semireticulado com dois elementos, que é único a menos de um isomorfismo) e é definido pela apresentação de monóides $\langle x_0 \mid x_0^2 = x_0 \rangle$. Por outro lado, para $n = 1$, temos $X = \{x_0\}$ e $\mathrm{R} = \{x_0^3 = x_0^2, x_0^2 = x_0\}$ (a primeira relação pertence a R_3 e a segunda a R_5). Como $x_0^3 = x_0^2$ é trivialmente uma consequência de $x_0^2 = x_0$, é claro que $\mathcal{POI}_1$ é definido pela apresentação de monóides $\langle X \mid \mathrm{R} \rangle$.

2. Denotemos por B_2 o semigrupo de Brandt combinatorial de ordem 2, i.e. o único semigrupo inverso aperiódico 0-simples com dois idempotentes não nulos (a menos de um isomorfismo). Este semigrupo aparece frequentemente definido pela apresentação de semigrupos

$$\langle x_0, x_1 \mid x_0^2 = x_1^2 = 0, x_0x_1x_0 = x_0, x_1x_0x_1 = x_1 \rangle.$$

Observemos que, para uma palavra w, a expressão $w = 0$ representa o conjunto de todas as relações da forma $wx = xw = w$, com x uma letra. Agora, dado que $\mathcal{POI}_2$ é (a menos de um isomorfismo) o monóide B_2^1, então podemos afirmar que $\mathcal{POI}_2$ é definido pela apresentação de monóides

$$\langle x_0, x_1 \mid x_0^3 = x_0^2 = x_1^2, x_0^2x_1 = x_0^2, x_1x_0^2 = x_0^2, x_0x_1x_0 = x_0, x_1x_0x_1 = x_1 \rangle.$$

Para $n = 2$, temos $\mathrm{R} = \{x_0^2x_1 = x_0^2, x_1x_0^2 = x_0^2, x_0x_1x_0 = x_0, x_1x_0x_1 = x_1, x_0x_1^2 = x_1^2\}$. Uma vez que $x_0^3 = x_0^2$ é uma consequência de $x_0^2x_1 = x_0^2$ e de $x_0x_1x_0 = x_0$ (de facto, $x_0^3 \equiv x_0^2x_0 = x_0^2x_1x_0 \equiv x_0x_0x_1x_0 = x_0^2$), $x_1^2 = x_0^2$ é uma consequência de $x_0^2x_1 = x_0^2$ e $x_0x_1^2 = x_1^2$ (de facto, $x_1^2 = x_0x_1^2 = x_0^2x_1^2 = x_0^2x_1 = x_0^2$) e, por outro lado, $x_0x_1^2 = x_1^2$ é uma consequência de $x_0^3 = x_1^2 = x_0^2$ (de facto, $x_0x_1^2 = x_0x_0^2 = x_0^2 = x_1^2$), então $\mathcal{POI}_2$ é também definido pela apresentação de monóides $\langle X \mid \mathrm{R} \rangle$.

3. Para $n = 3$, temos $X = \{x_0, x_1, x_2\}$ e o conjunto R é constituído pelas seguintes 10 relações: $x_1x_0 = x_0x_2$, $x_0^2x_1 = x_0^2 = x_2x_0^2$, $x_1x_2x_1 = x_2x_1 = x_2x_1x_2$, $x_0x_1x_2x_0 = x_0$, $x_1x_2x_0x_1 = x_1$, $x_2x_0x_1x_2 = x_2$, $x_2x_0x_1^2 = x_1^2$ e $x_0x_1x_2^2 = x_2^2$ (observemos que R_2 é ainda vazia). Usando conjuntamente os pacotes [36] e [30] para o GAP, mostramos que $\langle X \mid \mathrm{R} \rangle$ tem 20 elementos. Sendo este o número de elementos de $\mathcal{POI}_3$ e visto que as transformações

$$s_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

constituem um conjunto de geradores de $\mathcal{POI}_3$ que satisfazem todas as relações de R, concluímos que $\mathcal{POI}_3$ é definido pela apresentação de monóides $\langle X \mid \mathrm{R} \rangle$.

Fazendo uso dos mesmos pacotes para o GAP, estabelecemos também que o monóide definido pela apresentação $\langle X \mid \mathrm{R} \rangle$ tem 70, 252 e 924 elementos, respectivamente para $n = 4$, $n = 5$ e $n = 6$, sendo este exactamente o número de elementos de $\mathcal{POI}_4$, $\mathcal{POI}_5$ e $\mathcal{POI}_6$, respectivamente. Estes dados também podem ser obtidos usando o pacote [47] para o GAP, mas em comparação com [36] (em conjunto com [30]) o uso de [47] é "incomparavelmente"mais lento (por exemplo, para $n = 6$, usando [47] só ao fim de quase uma semana se obtém uma resposta, enquanto que usando [36] a resposta obtém-se em apenas alguns minutos, na mesma máquina, neste caso, uma "Dec Alpha Station"). De forma análoga ao caso $n = 3$, podemos encontrar geradores de $\mathcal{POI}_n$ satisfazendo todas as relações de R e, portanto, temos que $\mathcal{POI}_n$ é definido pela apresentação de monóides $\langle X \mid \mathrm{R}\rangle$, para $n \in \{4, 5, 6\}$.

Considerando agora o caso geral, começamos por provar o resultado seguinte:

Proposição 2.4.1. *Para $1 \leq i \leq n-1$, a relação $x_i^3 = x_i^2$ é uma consequência de* R_5 *e de* R_6.

Demonstração. Tomemos $1 \leq i \leq n-1$. Então

$$x_i^3 \equiv x_i x_i^2 = x_i(x_{i+1} \cdots x_{n-1} x_0 \cdots x_{i-1} x_i^2) \equiv (x_i x_{i+1} \cdots x_{n-1} x_0 \cdots x_{i-1} x_i) x_i = x_i x_i$$

(no segundo passo usámos R_6 e no quarto R_5). ■

Seguidamente, mostramos que a palavra x_0^n representa um zero do monóide definido pela apresentação $\langle X \mid \mathrm{R}\rangle$. Com este objectivo, começamos por provar dois lemas:

Lema 2.4.2. *Para $1 \leq i \leq n-1$, a relação $x_0^{i+1} x_i = x_0^{i+1}$ é uma consequência de* R_1 *e de* R_{3a}.

Demonstração. Para $i = 1$, temos $x_0^2 x_1 = x_0^2$, por R_{3a}. Suponhamos, por hipótese de indução, que $x_0^{i+1} x_i = x_0^{i+1}$, para certo $1 \leq i < n-1$. Então

$$x_0^{i+2} x_{i+1} \equiv x_0^{i+1} x_0 x_{i+1} = x_0^{i+1} x_i x_0 = x_0^{i+1} x_0 \equiv x_0^{i+2}$$

(no segundo passo usámos R_1 e no terceiro a hipótese de indução). ■

De forma análoga podemos provar o lema seguinte.

Lema 2.4.3. *Para $1 \leq i \leq n-1$, a relação $x_i x_0^{n-i+1} = x_0^{n-i+1}$ é uma consequência de* R_1 *e de* R_{3b}. ■

Denotemos por R_5^0 a relação $x_0x_1\cdots x_{n-1}x_0 = x_0$. Como consequência dos Lemas 2.4.2 e 2.4.3, temos:

Proposição 2.4.4. *A palavra x_0^n representa um zero do monóide definido pela apresentação $\langle X \mid \mathrm{R}_1 \cup \mathrm{R}_3 \cup \mathrm{R}_5^0\rangle$. Além disso, x_0^n é também um zero do monóide definido pela apresentação $\langle X \mid \mathrm{R}\rangle$.*

Demonstração. Para provarmos este resultado basta mostrarmos que $xx_0^n = x_0^n = x_0^nx$, para qualquer $x \in X$. Tomemos $1 \leq i \leq n-1$. Pelos Lemas 2.4.2 e 2.4.3, temos $x_0^nx_i = x_0^n$ e $x_ix_0^n = x_0^n$. Por outro lado, aplicando R_5^0 e o Lema 2.4.2, obtemos

$$x_0^n \equiv x_0^{n-1}x_0 = x_0^{n-1}x_0x_1\cdots x_{n-1}x_0 \equiv (x_0^nx_1\cdots x_{n-1})x_0 = x_0^nx_0 \equiv x_0^{n+1},$$

como queríamos demonstrar. ∎

Recordemos que o nosso objectivo é estabelecer uma apresentação para os monóides $\mathcal{POI}_n$, usando o método fornecido pela Proposição 1.7.2. O nosso candidato a conjunto de relações é R. Seguidamente, apresentamos o nosso candidato W a conjunto de palavras reduzidas para $\mathcal{POI}_n$.

Sejam $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\ell = n-k$ $(1 \leq \ell \leq n)$ e

$$w_j \equiv x_{\ell-j+1}\cdots x_{\ell-j+k} \equiv x_{n-j+1-k}\cdots x_{n-j}, \quad 1 \leq j \leq \ell.$$

Observemos que

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & x_\ell\cdots x_{n-1} \\ w_2 & = & x_{\ell-1}\cdots x_{n-2} \\ & \vdots & \\ w_{\ell-1} & = & x_2\cdots x_{k+1} \\ w_\ell & = & x_1\cdots x_k. \end{array}$$

A $w_1, \ldots, w_\ell$ chamamos *palavras k-principais*. Observemos que $|w_j| = k$, para qualquer $1 \leq j \leq \ell$. Seja W_k o conjunto formado por todas as palavras da forma

$$\left(\prod_{j=1}^{\ell} u_j\right)x_0^\ell\left(\prod_{j=1}^{\ell} v_j\right),$$

em que, para qualquer $1 \leq j \leq \ell$, u_j é um sufixo de w_j e v_j é um prefixo de w_j, $0 \leq |u_1| \leq \cdots \leq |u_\ell| \leq k$ e $k \geq |v_1| \geq \cdots \geq |v_\ell| \geq 0$. Notemos que $W_0 = \{x_0^n\}$ (pois qualquer palavra 0-principal é a palavra vazia). Definimos também $W_n = \{1\}$ e $W = W_0 \cup W_1 \cup \cdots \cup W_n$.

Exemplo 2.4.2. Seja $n = 4$. Então, as três palavras 1-principais são

$$w_1 = x_3,\ w_2 = x_2 \text{ e } w_3 = x_1,$$

as duas palavras 2-principais são

$$w_1 = x_2x_3 \text{ e } w_2 = x_1x_2$$

e a palavra 3-principal é

$$w_1 = x_1x_2x_3.$$

A ideia de considerar as linguagens W_k, com $0 \leq k \leq n$, foi inspirada na estrutura das $\mathcal{J}$-classes de $\mathcal{POI}_n$, com $n \in \{1, \ldots, 6\}$. De facto, para um conjunto conveniente de geradores de $\mathcal{POI}_n$, a linguagem W_k representa a $\mathcal{J}$-classe J_k de todos os elementos de característica k, para $k \in \{0, \ldots, n\}$. Para $n = 4$, veja-se o apêndice no fim deste capítulo.

Para mostrar que a linguagem W satisfaz a segunda condição da Proposição 1.7.2, provamos que, para qualquer $w \in W$ e para qualquer $0 \leq i \leq n-1$, existe uma palavra w' de W tal que a relação $wx_i = w'$ é uma consequência de R. Tendo em vista este objectivo, passamos em seguida a provar uma série de lemas, os quais estabelecem as relações auxiliares de que necessitamos.

É uma questão de rotina provar que:

Lema 2.4.5. *Para quaisquer $i, j \geq 1$ tais que $i + j \leq n - 1$, a relação $x_ix_0^j = x_0^jx_{i+j}$ é uma consequência de* R_1. ■

Lema 2.4.6. *Seja $1 \leq p \leq n-2$. Então a relação*

$$\left(\prod_{j=1}^{p}(x_{n-j+1-s_j}\cdots x_{n-j})\right)x_0^{p+1} = \left(\prod_{j=1}^{p}(x_{n-j+1-s_j}\cdots x_{n-j-1})\right)x_0^{p+1}$$

é uma consequência de R_1 *e de* $\mathrm{R}_{3\mathrm{b}}$, *para quaisquer $0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_p \leq n-p$.*

Demonstração. Provamos o lema por indução em p.

Para $p = 1$, queremos mostrar que $(x_{n-s_1}\cdots x_{n-1})x_0^2 = (x_{n-s_1}\cdots x_{n-2})x_0^2$, para qualquer $0 \leq s_1 \leq n-1$. Se $s_1 = 0$, então temos simplesmente a relação trivial $x_0^2 = x_0^2$, e se $s_1 = 1$, temos exactamente a relação $\mathrm{R}_{3\mathrm{b}}$. Se $s_1 \geq 2$, aplicando $\mathrm{R}_{3\mathrm{b}}$, temos $(x_{n-s_1}\cdots x_{n-1})x_0^2 \equiv x_{n-s_1}\cdots x_{n-2}x_{n-1}x_0^2 = (x_{n-s_1}\cdots x_{n-2})x_0^2$, como pretendíamos.

Suponhamos agora que a igualdade é válida para $1 \leq p < n-2$. Tomemos $s_1, \ldots, s_p, s_{p+1} \in \mathbb{N}$ tais que $0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_p \leq s_{p+1} \leq n-p-1$. Então

$$(x_{n-p-s_{p+1}}\cdots x_{n-p-2})x_0^{p+1} = x_0^{p+1}(x_{n-s_{p+1}+1}\cdots x_{n-1}). \tag{1}$$

De facto, se $0 \leq s_{p+1} \leq 1$ então (1) é uma relação trivial e, como $n-p-2>0$, se $s_{p+1} \geq 2$ então (1) resulta do Lema 2.4.5 (aplicado $s_{p+1}-1$ vezes). Então,

$$\begin{aligned}
& \left(\prod_{j=1}^{p+1}\left(x_{n-j+1-s_j}\cdots x_{n-j}\right)\right)x_0^{(p+1)+1} \\
\equiv\ & \left(\prod_{j=1}^{p}\left(x_{n-j+1-s_j}\cdots x_{n-j}\right)\right)(x_{n-(p+1)+1-s_{p+1}}\cdots x_{n-(p+1)})x_0^{(p+1)+1} \\
=\ & \left(\prod_{j=1}^{p}\left(x_{n-j+1-s_j}\cdots x_{n-j}\right)\right)(x_{n-p-s_{p+1}}\cdots x_{n-p-2})x_0^{(p+1)+1} && \text{(pelo Lema 2.4.3)} \\
=\ & \left(\prod_{j=1}^{p}\left(x_{n-j+1-s_j}\cdots x_{n-j}\right)\right)x_0^{p+1}(x_{n-s_{p+1}+1}\cdots x_{n-1})x_0 && \text{(por (1))} \\
=\ & \left(\prod_{j=1}^{p}\left(x_{n-j+1-s_j}\cdots x_{n-j-1}\right)\right)x_0^{p+1}(x_{n-s_{p+1}+1}\cdots x_{n-1})x_0 \\
& && \text{(por hipótese de indução)} \\
=\ & \left(\prod_{j=1}^{p}\left(x_{n-j+1-s_j}\cdots x_{n-j-1}\right)\right)(x_{n-p-s_{p+1}}\cdots x_{n-p-2})x_0^{p+1}x_0 && \text{(por (1))} \\
=\ & \left(\prod_{j=1}^{p+1}\left(x_{n-j+1-s_j}\cdots x_{n-j-1}\right)\right)x_0^{(p+1)+1}.
\end{aligned}$$

Concluímos portanto que o lema é verdadeiro. ∎

Lema 2.4.7. *Para qualquer $2 \leq i \leq j \leq n-1$, a relação*

$$x_j(x_{i-1}\cdots x_{j-1})x_j^2 = x_j(x_{i-1}\cdots x_{j-1})$$

é uma consequência de R_2 *e de* $\mathrm{R}_{4\mathrm{a}}$.

Demonstração. Se $i=j$, aplicando $\mathrm{R}_{4\mathrm{a}}$ duas vezes, temos $x_jx_{j-1}x_j^2 = x_jx_{j-1}$, como pretendíamos. Se $i<j$ então

$$\begin{aligned}
x_j(x_{i-1}\cdots x_{j-1})x_j^2 &= (x_{i-1}\cdots x_{j-2})x_jx_{j-1}x_j^2 && \text{(por } \mathrm{R}_2\text{)} \\
&= (x_{i-1}\cdots x_{j-2})x_jx_{j-1} && \text{(pelo caso } i=j\text{)} \\
&= x_j(x_{i-1}\cdots x_{j-1}), && \text{(por } \mathrm{R}_2\text{)}
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ∎

Lema 2.4.8. *Seja $1 \leq i \leq n-1$. Então, para qualquer $i \leq p \leq n-1$ e para quaisquer $n-p \geq r_1 \geq \cdots \geq r_i \geq 1$, a relação*

$$x_0^p\left(\prod_{j=1}^{i}(x_{p-j+1}\cdots x_{p-j+r_j})\right)x_{p-i+r_i}$$

$$= (x_{r_i}\cdots x_{n-(p+1)})x_0^{p+1}\left(\prod_{j=1}^{i}(x_{p-j+2}\cdots x_{p-j+r_j})\right)(x_{p-i+1}\cdots x_{p-(i+1)+r_i})$$

é uma consequência de R_1, R_2, $\mathrm{R}_{3\mathrm{a}}$, R_4 *e de* R_6.

Demonstração. Em primeiro lugar, provamos a igualdade para $i = 1$. Consideremos $1 \leq p \leq n-1$ e $n-p \geq r_1 \geq 1$. Se $r_1 = 1$, precisamos provar que $x_0^p x_p x_p = (x_1 \cdots x_{n-(p+1)}) x_0^{p+1}$. De facto,

$$\begin{aligned} x_0^p x_p^2 &= x_0^p (x_{p+1} \cdots x_{n-1} x_0 x_1 \cdots x_{p-1}) x_p^2 && \text{(por R}_6\text{)} \\ &= (x_1 \cdots x_{n-(p+1)}) x_0^{p+1} (x_1 \cdots x_{p-1}) x_p^2 && \text{(pelo Lema 2.4.5)} \\ &= (x_1 \cdots x_{n-(p+1)}) x_0^{p+1}. && \text{(pelo Lema 2.4.2)} \end{aligned}$$

Suponhamos agora que $r_1 \geq 2$. Então

$$\begin{aligned} & x_0^p (x_p \cdots x_{p-1+r_1}) x_{p-1+r_1} \\ \equiv\ & x_0^p (x_p \cdots x_{p-2+r_1}) x_{p-1+r_1}^2 \\ =\ & x_0^p (x_p \cdots x_{p-2+r_1})(x_{p+r_1} \cdots x_{n-1} x_0 x_1 \cdots x_{p-2+r_1} x_{p-1+r_1}^2) && \text{(por R}_6\text{)} \\ =\ & x_0^p (x_{p+r_1} \cdots x_{n-1})(x_p \cdots x_{p-2+r_1}) x_0 (x_1 \cdots x_{p-2+r_1}) x_{p-1+r_1}^2 && \text{(por R}_2\text{)} \\ =\ & (x_{r_1} \cdots x_{n-(p+1)}) x_0^p x_0 (x_{p+1} \cdots x_{p-1+r_1})(x_1 \cdots x_{p-2+r_1}) x_{p-1+r_1}^2 \\ & && \text{(pelo Lema 2.4.5)} \\ \equiv\ & (x_{r_1} \cdots x_{n-(p+1)}) x_0^{p+1} (x_{p+1} \cdots x_{p-1+r_1})(x_1 \cdots x_{p-1})(x_p \cdots x_{p-2+r_1}) x_{p-1+r_1}^2 \\ =\ & (x_{r_1} \cdots x_{n-(p+1)}) x_0^{p+1} (x_1 \cdots x_{p-1})(x_{p+1} \cdots x_{p-1+r_1})(x_p \cdots x_{p-2+r_1}) x_{p-1+r_1}^2 \\ & && \text{(por R}_2\text{)} \\ =\ & (x_{r_1} \cdots x_{n-(p+1)}) x_0^{p+1} (x_{p+1} \cdots x_{p-2+r_1}) x_{p-1+r_1} (x_p \cdots x_{p-2+r_1}) x_{p-1+r_1}^2 \\ & && \text{(pelo Lema 2.4.2)} \\ =\ & (x_{r_1} \cdots x_{n-(p+1)}) x_0^{p+1} (x_{p+1} \cdots x_{p-2+r_1}) x_{p-1+r_1} (x_p \cdots x_{p-2+r_1}) \\ & && \text{(pelo Lema 2.4.7)} \\ \equiv\ & (x_{r_1} \cdots x_{n-(p+1)}) x_0^{p+1} (x_{p+1} \cdots x_{p-1+r_1})(x_p \cdots x_{p-2+r_1}). \end{aligned}$$

Assim, provámos a igualdade para $i = 1$.

Seguidamente, por hipótese de indução, admitamos que a igualdade é válida para $1 \leq i-1 \leq n-2$. Tomemos $1 \leq i \leq p \leq n-1$ e $n-p \geq r_1 \geq \cdots \geq r_i \geq 1$.

Começamos por considerar as palavras

$$w_1 \equiv (x_{p-(i-1)+1} \cdots x_{p-(i-1)+r_{i-1}})(x_{p-i+1} \cdots x_{p-i+r_i}) x_{p-i+r_i}$$

e

$$w_2 \equiv (x_{p-(i-1)+1} \cdots x_{p-i+r_i}) x_{p-i+r_i+1}^2 (x_{p-i+1} \cdots x_{p-i+r_i})(x_{p-i+r_i+2} \cdots x_{p-(i-1)+r_{i-1}})$$

e provar que $w_1 = w_2$. De facto, tendo em conta que

$$p-(i-1)+r_{i-1} \geq p-i+1+r_i > p-i+r_i,$$

temos

$$\begin{aligned}
w_1 &\equiv (x_{p-(i-1)+1}\cdots x_{p-i+r_i})(x_{p-i+r_i+1}\cdots x_{p-(i-1)+r_{i-1}})(x_{p-i+1}\cdots x_{p-i+r_i-1})\\
&\quad x_{p-i+r_i}^2\\
&= (x_{p-(i-1)+1}\cdots x_{p-i+r_i})(x_{p-i+1}\cdots x_{p-i+r_i-1})(x_{p-i+r_i+1}\cdots x_{p-(i-1)+r_{i-1}})\\
&\quad x_{p-i+r_i}^2 && \text{(por R}_2)\\
&= (x_{p-(i-1)+1}\cdots x_{p-i+r_i})(x_{p-i+1}\cdots x_{p-i+r_i-1})x_{p-i+r_i+1}x_{p-i+r_i}^2\\
&\quad (x_{p-i+r_i+2}\cdots x_{p-(i-1)+r_{i-1}}) && \text{(por R}_2)\\
&= (x_{p-(i-1)+1}\cdots x_{p-i+r_i})(x_{p-i+1}\cdots x_{p-i+r_i-1})x_{p-i+r_i+1}x_{p-i+r_i}x_{p-i+r_i+1}\\
&\quad x_{p-i+r_i}(x_{p-i+r_i+2}\cdots x_{p-(i-1)+r_{i-1}}) && \text{(por R}_{4\mathrm{a}})\\
&= (x_{p-(i-1)+1}\cdots x_{p-i+r_i})(x_{p-i+1}\cdots x_{p-i+r_i-1})x_{p-i+r_i+1}^2x_{p-i+r_i}\\
&\quad (x_{p-i+r_i+2}\cdots x_{p-(i-1)+r_{i-1}}) && \text{(por R}_{4\mathrm{b}})\\
&= (x_{p-(i-1)+1}\cdots x_{p-i+r_i})x_{p-i+r_i+1}^2(x_{p-i+1}\cdots x_{p-i+r_i-1})x_{p-i+r_i}\\
&\quad (x_{p-i+r_i+2}\cdots x_{p-(i-1)+r_{i-1}}) && \text{(por R}_2)\\
&\equiv w_2.
\end{aligned}$$

Tomemos $r'_{i-1} = r_i$ e $r'_j = r_j$, para qualquer $1 \leq j \leq i-2$. Seja

$$w \equiv x_0^p\Big(\textstyle\prod_{j=1}^{i}(x_{p-j+1}\cdots x_{p-j+r_j})\Big)x_{p-i+r_i}.$$

Então

$$\begin{aligned}
w &\equiv x_0^p\Big(\textstyle\prod_{j=1}^{i-2}(x_{p-j+1}\cdots x_{p-j+r_j})\Big)w_1 = x_0^p\Big(\textstyle\prod_{j=1}^{i-2}(x_{p-j+1}\cdots x_{p-j+r_j})\Big)w_2\\
&\equiv x_0^p\Big(\textstyle\prod_{j=1}^{i-2}(x_{p-j+1}\cdots x_{p-j+r_j})\Big)(x_{p-(i-1)+1}\cdots x_{p-(i-1)+r_i})x_{p-(i-1)+r_i}\\
&\quad (x_{p-i+1}\cdots x_{p-i+r_i})(x_{p-i+r_i+2}\cdots x_{p-(i-1)+r_{i-1}})\\
&\equiv x_0^p\Big(\textstyle\prod_{j=1}^{i-1}(x_{p-j+1}\cdots x_{p-j+r'_j})\Big)x_{p-(i-1)+r'_{i-1}}(x_{p-i+1}\cdots x_{p-i+r_i})\\
&\quad (x_{p-i+r_i+2}\cdots x_{p-(i-1)+r_{i-1}})
\end{aligned}$$

Uma vez que $n-p \geq r_1 \geq \cdots \geq r_{i-2} \geq r_{i-1} \geq r_i \geq 1$ e $i \leq p$, temos, em particular, $n-p \geq r'_1 \geq \cdots \geq r'_{i-2} \geq r'_{i-1} \geq 1$ e $i-1 \leq p$. Logo, por hipótese, obtemos

$$\begin{aligned}
w &= (x_{r'_{i-1}}\cdots x_{n-(p+1)})x_0^{p+1}\Big(\textstyle\prod_{j=1}^{i-1}(x_{p-j+2}\cdots x_{p-j+r'_j})\Big)(x_{p-(i-1)+1}\cdots x_{p-i+r'_{i-1}})\\
&\quad (x_{p-i+1}\cdots x_{p-i+r_i})(x_{p-i+r_i+2}\cdots x_{p-(i-1)+r_{i-1}})\\
&\equiv (x_{r_i}\cdots x_{n-(p+1)})x_0^{p+1}\Big(\textstyle\prod_{j=1}^{i-2}(x_{p-j+2}\cdots x_{p-j+r_j})\Big)(x_{p-(i-1)+2}\cdots x_{p-(i-1)+r_i})\\
&\quad (x_{p-(i-1)+1}\cdots x_{p-i+r_i})(x_{p-i+1}\cdots x_{p-i+r_i})(x_{p-i+r_i+2}\cdots x_{p-(i-1)+r_{i-1}})\\
&= (x_{r_i}\cdots x_{n-(p+1)})x_0^{p+1}\Big(\textstyle\prod_{j=1}^{i-2}(x_{p-j+2}\cdots x_{p-j+r_j})\Big)(x_{p-(i-1)+2}\cdots x_{p-i+r_i+1})\\
&\quad (x_{p-i+r_i+2}\cdots x_{p-(i-1)+r_{i-1}})(x_{p-i+2}\cdots x_{p-i+r_i})(x_{p-i+1}\cdots x_{p-i+r_i}) \quad \text{(por R}_2)\\
&\equiv (x_{r_i}\cdots x_{n-(p+1)})x_0^{p+1}\Big(\textstyle\prod_{j=1}^{i-1}(x_{p-j+2}\cdots x_{p-j+r_j})\Big)(x_{p-i+2}\cdots x_{p-i+r_i})\\
&\quad (x_{p-i+1}\cdots x_{p-i+r_i}).
\end{aligned}$$

Se $r_i = 1$ então $p - j + 2 \geq p - (i-1) + 2 = (p - i + r_i) + 2$, para qualquer $1 \leq j \leq i-1$, e portanto

$$\begin{array}{rcll} w & = & (x_{r_i} \cdots x_{n-(p+1)}) x_0^{p+1} \Big(\prod_{j=1}^{i-1} (x_{p-j+2} \cdots x_{p-j+r_j}) \Big) x_{p-i+r_i} & \\ & = & (x_{r_i} \cdots x_{n-(p+1)}) x_0^{p+1} x_{p-i+r_i} \Big(\prod_{j=1}^{i-1} (x_{p-j+2} \cdots x_{p-j+r_j}) \Big) & (\text{por } \mathrm{R}_2) \\ & = & (x_{r_i} \cdots x_{n-(p+1)}) x_0^{p+1} \Big(\prod_{j=1}^{i-1} (x_{p-j+2} \cdots x_{p-j+r_j}) \Big) & (\text{pelo Lema 2.4.2}) \\ & \equiv & (x_{r_i} \cdots x_{n-(p+1)}) x_0^{p+1} \Big(\prod_{j=1}^{i} (x_{p-j+2} \cdots x_{p-j+r_j}) \Big) (x_{p-i+1} \cdots x_{p-(i+1)+r_i}), & \end{array}$$

visto que neste caso as palavras $x_{p-i+2} \cdots x_{p-i+r_i}$ e $x_{p-i+1} \cdots x_{p-(i+1)+r_i}$ são vazias. Se $r_i \geq 2$ então

$$\begin{array}{rcll} x_{p-i+r_i}(x_{p-i+1} \cdots x_{p-i+r_i}) & = & (x_{p-i+1} \cdots x_{p-i+r_i-2}) x_{p-i+r_i} x_{p-i+r_i-1} x_{p-i+r_i} & (\text{por } \mathrm{R}_2) \\ & = & (x_{p-i+1} \cdots x_{p-i+r_i-2}) x_{p-i+r_i} x_{p-i+r_i-1} & (\text{por } \mathrm{R}_{4\mathrm{a}}) \\ & = & x_{p-i+r_i}(x_{p-i+1} \cdots x_{p-i+r_i-2}) x_{p-i+r_i-1} & (\text{por } \mathrm{R}_2) \\ & \equiv & x_{p-i+r_i}(x_{p-i+1} \cdots x_{p-(i+1)+r_i}), & \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} w & = & (x_{r_i} \cdots x_{n-(p+1)}) x_0^{p+1} \Big(\prod_{j=1}^{i-1} (x_{p-j+2} \cdots x_{p-j+r_j}) \Big) (x_{p-i+2} \cdots x_{p-i+r_i}) \\ & & (x_{p-i+1} \cdots x_{p-(i+1)+r_i}) \\ & \equiv & (x_{r_i} \cdots x_{n-(p+1)}) x_0^{p+1} \Big(\prod_{j=1}^{i} (x_{p-j+2} \cdots x_{p-j+r_j}) \Big) (x_{p-i+1} \cdots x_{p-(i+1)+r_i}). \end{array}$$

Logo, o lema fica demonstrado. ■

Lema 2.4.9. *Para quaisquer* $1 \leq p < i \leq j \leq n-1$, *a relação*

$$(x_p \cdots x_j) x_{i-1} = (x_i \cdots x_j)(x_p \cdots x_{i-1})$$

é uma consequência de R_2 *e de* $\mathrm{R}_{4\mathrm{b}}$.

Demonstração. Tomemos $1 \leq p < i \leq j \leq n-1$. Então

$$\begin{array}{rcll} (x_p \cdots x_j) x_{i-1} & \equiv & (x_p \cdots x_{i-2}) x_{i-1} x_i (x_{i+1} \cdots x_j) x_{i-1} & \\ & = & (x_p \cdots x_{i-2}) x_{i-1} x_i x_{i-1} (x_{i+1} \cdots x_j) & (\text{por } \mathrm{R}_2) \\ & = & (x_p \cdots x_{i-2}) x_i x_{i-1} (x_{i+1} \cdots x_j) & (\text{por } \mathrm{R}_{4\mathrm{b}}) \\ & = & (x_p \cdots x_{i-2}) x_i (x_{i+1} \cdots x_j) x_{i-1} & (\text{por } \mathrm{R}_2) \\ & = & x_i (x_{i+1} \cdots x_j)(x_p \cdots x_{i-2}) x_{i-1} & (\text{por } \mathrm{R}_2) \\ & \equiv & (x_i \cdots x_j)(x_p \cdots x_{i-1}), & \end{array}$$

como queríamos demonstrar. ■

Lema 2.4.10. *Sejam* $1 \leq p \leq n-1$ *e* $1 \leq r < n-p$. *Dado* $1 \leq i \leq p$, *a relação*

$$\Big(\prod_{j=i}^{p} (x_{n-j+1-s_j} \cdots x_{n-j})\Big) x_r$$

$$= (x_{r+p-i+1} \cdots x_{n-i}) \Big(\prod_{j=i}^{p-1} (x_{n-j+1-s_j} \cdots x_{n-(j+1)})\Big) (x_{n-p+1-s_p} \cdots x_r)$$

é uma consequência de R_2 *e de* $\mathrm{R}_{4\mathrm{b}}$, *para quaisquer* $n-p-r < s_i \leq \cdots \leq s_p \leq n-p$.

Demonstração. Tomemos $1 \leq p \leq n-1$, $1 \leq r < n-p$ e $n-p-r < s_p \leq n-p$. Então $1 \leq n-p+1-s_p < r+1 \leq n-p \leq n-1$, donde, pelo Lema 2.4.9,

$$(x_{n-p+1-s_p} \cdots x_{n-p}) x_r = (x_{r+1} \cdots x_{n-p})(x_{n-p+1-s_p} \cdots x_r).$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que a igualdade é válida para certo $i \geq 2$ (considerando p e r fixados). O nosso objectivo é provar a igualdade para $i-1$. Sejam $s_{i-1}, s_i, \ldots, s_p \in \mathbb{N}$ tais que $n-p-r < s_{i-1} \leq s_i \leq \cdots \leq s_p \leq n-p$. Notemos que, em particular, $n-p-r < s_i \leq \cdots \leq s_p \leq n-p$. Então, uma vez que

$$n-(i-1)+1-s_{i-1} < r+p-(i-1)+1 \leq n-(i-1),$$

pelo Lema 2.4.9, temos

$$\begin{array}{rl} & (x_{n-(i-1)+1-s_{i-1}} \cdots x_{n-(i-1)}) x_{r+p-i+1} \\ = & (x_{r+p-(i-1)+1} \cdots x_{n-(i-1)})(x_{n-(i-1)+1-s_{i-1}} \cdots x_{r+p-i+1}). \end{array} \tag{2}$$

Em seguida, tomemos $w \equiv \Big(\prod_{j=i-1}^{p} (x_{n-j+1-s_j} \cdots x_{n-j})\Big) x_r$. Então, atendendo à hipótese e a (2), temos

$$\begin{array}{rcl} w & \equiv & (x_{n-(i-1)+1-s_{i-1}} \cdots x_{n-(i-1)}) \Big(\prod_{j=i}^{p} (x_{n-j+1-s_j} \cdots x_{n-j})\Big) x_r \\ & = & (x_{n-(i-1)+1-s_{i-1}} \cdots x_{n-(i-1)})(x_{r+p-i+1} \cdots x_{n-i}) \\ & & \Big(\prod_{j=i}^{p-1} (x_{n-j+1-s_j} \cdots x_{n-(j+1)})\Big)(x_{n-p+1-s_p} \cdots x_r) \\ & = & (x_{r+p-(i-1)+1} \cdots x_{n-(i-1)})(x_{n-(i-1)+1-s_{i-1}} \cdots x_{r+p-i+1} \cdots x_{n-i}) \\ & & \Big(\prod_{j=i}^{p-1} (x_{n-j+1-s_j} \cdots x_{n-(j+1)})\Big)(x_{n-p+1-s_p} \cdots x_r) \\ & \equiv & (x_{r+p-(i-1)+1} \cdots x_{n-(i-1)}) \Big(\prod_{j=i-1}^{p-1} (x_{n-j+1-s_j} \cdots x_{n-(j+1)})\Big)(x_{n-p+1-s_p} \cdots x_r), \end{array}$$

como pretendíamos. ■

O último lema desta secção, que a seguir apresentamos, completa a nossa lista de relações auxiliares.

Lema 2.4.11. *Sejam* $1 \leq i \leq q \leq n-1$. *Dado* $1 \leq p \leq i$, *a relação*

$$\Big(\prod_{j=p}^{i} (x_{q-j+1} \cdots x_{q-j+r_j})\Big)x_t$$

$$= (x_{t+i-p+1} \cdots x_{q-p+r_p})\Big(\prod_{j=p+1}^{i} (x_{q-j+2} \cdots x_{q-j+r_j})\Big)(x_{q-i+1} \cdots x_t)$$

é uma consequência de R_2 *e de* $\mathrm{R}_{4\mathrm{b}}$, *para quaisquer* $n-q \geq r_p \geq \cdots \geq r_i \geq 0$ *e para qualquer* $q-i+1 \leq t < q-i+r_i$.

Demonstração. Tomemos $1 \leq i \leq q \leq n-1$. Começamos por demonstrar a igualdade para $p = i$. Sejam $n-q \geq r_i \geq 0$ e $q-i+1 < t+1 \leq q-i+r_i$. Então, resulta de imediato do Lema 2.4.9 que

$$(x_{q-i+1} \cdots x_{q-i+r_i})x_t = (x_{t+1} \cdots x_{q-i+r_i})(x_{q-i+1} \cdots x_t),$$

pelo que a igualdade é válida para $p = i$.

Suponhamos, por hipótese de indução, que a igualdade é válida para $p+1$ (para certo $1 \leq p < i$, considerando i e q fixados). O nosso objectivo é provar a igualdade para p. Tomemos $r_p, \ldots, r_i, t \in \mathbb{N}$ tais que $n-q \geq r_p \geq \cdots \geq r_i \geq 0$ e $q-i+1 \leq t < q-i+r_i$. Como $q-i+1 \leq t < q-i+r_i \leq q-i+r_p$, então $q-p+1 \leq t+i-p < q-p+r_p$ e portanto, pelo Lema 2.4.9, temos

$$(x_{q-p+1} \cdots x_{q-p+r_p})x_{t+i-p} = (x_{t+i-p+1} \cdots x_{q-p+r_p})(x_{q-p+1} \cdots x_{t+i-p}). \tag{3}$$

Seguidamente, tomemos $w \equiv \Big(\prod_{j=p}^{i} (x_{q-j+1} \cdots x_{q-j+r_j})\Big)x_t$. Então, por hipótese (notemos que $n-q \geq r_{p+1} \geq \cdots \geq r_i \geq 0$ e $q-i+1 \leq t < q-i+r_i$) e pela relação (3), temos

$$\begin{aligned}
w &\equiv (x_{q-p+1} \cdots x_{q-p+r_p})\Big(\prod_{j=p+1}^{i} (x_{q-j+1} \cdots x_{q-j+r_j})\Big)x_t \\
&= (x_{q-p+1} \cdots x_{q-p+r_p})(x_{t+i-p} \cdots x_{q-(p+1)+r_{p+1}}) \\
&\quad \Big(\prod_{j=p+2}^{i} (x_{q-j+2} \cdots x_{q-j+r_j})\Big)(x_{q-i+1} \cdots x_t) \\
&= (x_{t+i-p+1} \cdots x_{q-p+r_p})(x_{q-p+1} \cdots x_{t+i-p} \cdots x_{q-(p+1)+r_{p+1}}) \\
&\quad \Big(\prod_{j=p+2}^{i} (x_{q-j+2} \cdots x_{q-j+r_j})\Big)(x_{q-i+1} \cdots x_t) \\
&\equiv (x_{t+i-p+1} \cdots x_{q-p+r_p})\Big(\prod_{j=p+1}^{i} (x_{q-j+2} \cdots x_{q-j+r_j})\Big)(x_{q-i+1} \cdots x_t),
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ∎

Estamos agora em condições de provar a seguinte propriedade da linguagem W:

Proposição 2.4.12. *Dados* $w \in W$ *e* $0 \leq i \leq n-1$, *existe* $w' \in W$ *tal que a relação* $wx_i = w'$ *é uma consequência de* R.

Demonstração. Dividimos esta prova em vários passos.

Passo 1. Tomemos $w \in W_0$. Então $w \equiv x_0^n$ e, pela Proposição 2.4.4, para qualquer $0 \leq i \leq n-1$, $wx_i = x_0^n \in W$.

Passo 2. Tomemos $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ e $w \in W_k$. Sejam $\ell = n-k$ $(1 \leq \ell \leq n-1)$ e $w_1, \ldots, w_\ell$ as palavras k-principais. Então

$$w \equiv \Big(\prod_{j=1}^{\ell} u_j\Big) x_0^\ell \Big(\prod_{j=1}^{\ell} v_j\Big),$$

para certos u_j sufixo de w_j e v_j prefixo de w_j, em que $1 \leq j \leq \ell$,

$$0 \leq |u_1| \leq \cdots \leq |u_\ell| \leq k \quad \text{e} \quad k \geq |v_1| \geq \cdots \geq |v_\ell| \geq 0.$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, temos

$$u_j \equiv x_{n-j+1-s_j} \cdots x_{n-j} \quad \text{e} \quad v_j \equiv x_{\ell-j+1} \cdots x_{\ell-j+r_j},$$

para certos $0 \leq s_j, r_j \leq k$. Visto que $|u_j| = s_j$ e $|v_j| = r_j$, para qualquer $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, então temos

$$0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_\ell \leq k \quad \text{e} \quad k \geq r_1 \geq \cdots \geq r_\ell \geq 0.$$

Dado $j \in \{1, \ldots, \ell-1\}$, então $k \geq r_j \geq r_{j+1} \geq 0$, pelo que

$$n-j \geq \ell - j + r_j > \ell - (j+1) + r_{j+1} \geq \ell - j - 1.$$

Tomemos $p_j = \ell - j + r_j + 1$, para cada $1 \leq j \leq \ell$. Então

$$n-j+1 \geq p_j > p_{j+1} \geq \ell - j,$$

com $1 \leq j \leq \ell - 1$. Para facilitar a notação, convencionamos que no resto desta prova os índices são considerados módulo n. Assim, em particular, $x_n \equiv x_0$. Designemos $x_{p_1}, \ldots, x_{p_\ell}$ por *letras associadas* a w (x_{p_j} é a primeira letra da sequência $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ a seguir à última letra de v_j, para $1 \leq j \leq \ell$). Observemos que w possui exactamente ℓ letras associadas distintas. Notemos ainda que x_0 é uma letra associada a w se e só se $r_1 = k$ (i.e. $v_1 \equiv w_1$). Com efeito, para certo $1 \leq j \leq \ell$, $x_0 = x_{p_j}$ se e só se a última letra de v_j é x_{n-1} se e só se $v_j = w_1$ se e só se $j = 1$ e $r_1 = k$. Tomemos $u \equiv \prod_{j=1}^{\ell} u_j$.

Passo 2.1. Começamos por estudar as palavras da forma wx_{p_i}, com $1 \leq i \leq \ell$. Em primeiro lugar, consideramos a palavra wx_{p_1}.

Suponhamos que $r_1 = k$ (i.e. x_0 é uma letra associada a w). Então

$$\begin{aligned} wx_{p_1} &\equiv ux_0^\ell \Big(\prod_{j=1}^{\ell} v_j\Big) x_0 \\ &\equiv ux_0^\ell (x_\ell \cdots x_{\ell-1+r_1}) \Big(\prod_{j=2}^{\ell} (x_{\ell-j+1} \cdots x_{\ell-j+r_j})\Big) x_0 \\ &\equiv ux_0^\ell (x_\ell \cdots x_{n-1}) \Big(\prod_{j=2}^{\ell} (x_{\ell-j+1} \cdots x_{\ell-j+r_j})\Big) x_0. \end{aligned}$$

Como $n-1 > \ell - j + r_j$, para qualquer $2 \leq j \leq \ell$, então aplicando R_1 ($\sum_{j=2}^{\ell} r_j$ vezes) à expressão anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
wx_{p_1} &= ux_0^{\ell}(x_\ell \cdots x_{n-1})x_0\Big(\textstyle\prod_{j=2}^{\ell}(x_{\ell-j+2}\cdots x_{\ell-j+r_j+1})\Big) \\
&= ux_0^{\ell}(x_1 \cdots x_{\ell-1})(x_\ell \cdots x_{n-1})x_0\Big(\textstyle\prod_{j=2}^{\ell}(x_{\ell-j+2}\cdots x_{\ell-j+r_j+1})\Big) && \text{(pelo Lema 2.4.2)} \\
&= ux_0^{\ell}\Big(\textstyle\prod_{j=2}^{\ell}(x_{\ell-j+2}\cdots x_{\ell-j+r_j+1})\Big) && \text{(por } \mathrm{R}_5^0\text{)} \\
&\equiv ux_0^{\ell}\Big(\textstyle\prod_{j=1}^{\ell}\overline{v}_j\Big),
\end{aligned}$$

em que $\overline{v}_j \equiv x_{\ell-j+1}\cdots x_{\ell-j+r_{j+1}}$, para qualquer $1 \leq j \leq \ell-1$, e $\overline{v}_\ell \equiv 1$. É claro que $\overline{v}_j$ é um prefixo de w_j, para qualquer $1 \leq j \leq \ell$. Por outro lado, visto que $|\overline{v}_j| = r_{j+1}$, para qualquer $1 \leq j \leq \ell-1$, então $|\overline{v}_1| \geq \cdots \geq |\overline{v}_{\ell-1}| \geq |\overline{v}_\ell| = 0$. Logo

$$wx_{p_1} = ux_0^{\ell}\Big(\textstyle\prod_{j=1}^{\ell}\overline{v}_j\Big) \in W_k.$$

Seguidamente, estudamos os casos em que $x_{p_i} = x_{p_1}$, com $r_1 < k$, ou x_{p_i} é tal que $2 \leq i \leq \ell$. Nestes casos x_{p_i} não é a letra x_0. Observemos que, se $j > i$ então $\ell - i + r_i + 1 > \ell - j + r_j + 1$ e portanto, por R_2, temos

$$v_j x_{p_i} \equiv (x_{\ell-j+1}\cdots x_{\ell-j+r_j})x_{\ell-i+r_i+1} = x_{\ell-i+r_i+1}(x_{\ell-j+1}\cdots x_{\ell-j+r_j}) \equiv x_{p_i}v_j.$$

Consequentemente

$$wx_{p_i} = ux_0^{\ell}\Big(\textstyle\prod_{j=1}^{i}v_j\Big)x_{p_i}\Big(\textstyle\prod_{j=i+1}^{\ell}v_j\Big).$$

Suponhamos que $i \geq 2$ e $r_{i-1} = r_i$.

Se $r_i \geq 1$ então $v_{i-1}, v_i \neq 1$ e temos

$$\begin{aligned}
v_{i-1}v_i x_{p_i} &\equiv (x_{\ell-i+2}\cdots x_{\ell-i+r_{i-1}+1})(x_{\ell-i+1}\cdots x_{\ell-i+r_i})x_{\ell-i+r_i+1} \\
&\equiv (x_{\ell-i+2}\cdots x_{\ell-i+r_i+1})(x_{\ell-i+1}\cdots x_{\ell-i+r_i})x_{\ell-i+r_i+1} \\
&= (x_{\ell-i+2}\cdots x_{\ell-i+r_i})(x_{\ell-i+1}\cdots x_{\ell-i+r_i-1})x_{\ell-i+r_i+1}x_{\ell-i+r_i}x_{\ell-i+r_i+1} && \text{(por } \mathrm{R}_2\text{)} \\
&= (x_{\ell-i+2}\cdots x_{\ell-i+r_i})(x_{\ell-i+1}\cdots x_{\ell-i+r_i-1})x_{\ell-i+r_i+1}x_{\ell-i+r_i} && \text{(por } \mathrm{R}_{4\mathrm{a}}\text{)} \\
&= (x_{\ell-i+2}\cdots x_{\ell-i+r_i})x_{\ell-i+r_i+1}(x_{\ell-i+1}\cdots x_{\ell-i+r_i-1})x_{\ell-i+r_i} && \text{(por } \mathrm{R}_2\text{)} \\
&\equiv v_{i-1}v_i.
\end{aligned}$$

Suponhamos que $r_i = 0$. Então $p_i = \ell - i + 1$ e, visto que $2 \leq i \leq \ell$, temos $1 \leq p_i \leq \ell - 1$, pelo que, pelo Lema 2.4.2,

$$x_0^{\ell}x_{p_i} = x_0^{\ell}.$$

Se $r_1 = 0$ então $r_j = 0$, para qualquer $1 \leq j \leq \ell$, donde

$$x_0^{\ell}\Big(\textstyle\prod_{j=1}^{i}v_j\Big)x_{p_i} \equiv x_0^{\ell}x_{p_i} = x_0^{\ell} \equiv x_0^{\ell}\Big(\textstyle\prod_{j=1}^{i}v_j\Big).$$

Se $r_1 \geq 1$ então $r_1 \geq \cdots \geq r_p \geq 1$ e $r_{p+1} = \cdots = r_{i-1} = r_i = 0$, para certo $1 \leq p \leq i-2$ (neste caso, necessariamente, $i \geq 3$, pois se $i = 2$ então $r_1 = r_2 = 0$). Nesta situação, para $1 \leq j \leq p$, temos

$$\ell - j + r_j \geq \ell - j + 1 \geq (\ell - i + 1) + 2 = p_i + 2,$$

donde $v_j x_{p_i} = x_{p_i} v_j$, por R_2. Logo

$$x_0^\ell \Big(\prod_{j=1}^i v_j\Big) x_{p_i} \equiv x_0^\ell \Big(\prod_{j=1}^p v_j\Big) x_{p_i} \Big(\prod_{j=p+1}^i v_j\Big) = x_0^\ell x_{p_i} \Big(\prod_{j=1}^p v_j\Big) = x_0^\ell \Big(\prod_{j=1}^p v_j\Big).$$

Por conseguinte, para $i \geq 2$ e $r_{i-1} = r_i$, em qualquer das situações consideradas, temos

$$w x_{p_i} = w \in W_k.$$

Suponhamos agora que $i = 1$ ou $i \geq 2$, com $r_{i-1} > r_i$. Definimos $\overline{v}_j \equiv v_j$, para $j \in \{1, \ldots, \ell\} \backslash \{i\}$, e $\overline{v}_i \equiv v_i x_{p_i} \equiv x_{\ell-i+1} \cdots x_{\ell-i+r_i+1}$. Então, para $j \in \{1, \ldots, \ell\} \backslash \{i\}$, $\overline{v}_j$ é, por construção, um prefixo de w_j e $|\overline{v}_j| = r_j$. Por outro lado, $|\overline{v}_i| = r_i + 1$ e $\overline{v}_i$ é um prefixo de w_i se e só se $r_i + 1 \leq k$.

Se $i = 1$, como por hipótese $r_1 < k$, então $\overline{v}_1$ é um prefixo de w_1 e temos $r_1 + 1 > r_2 \geq \cdots \geq r_\ell$, donde $|\overline{v}_1| > |\overline{v}_2| \geq \cdots \geq |\overline{v}_\ell|$.

Se $i \geq 2$, visto que $k \geq r_{i-1} \geq r_i + 1$, então $\overline{v}_i$ é um prefixo de w_i e temos

$$r_1 \geq \cdots \geq r_{i-1} \geq r_i + 1 > r_{i+1} \geq \cdots \geq r_\ell \geq 0,$$

donde

$$|\overline{v}_1| \geq \cdots \geq |\overline{v}_{i-1}| \geq |\overline{v}_i| > |\overline{v}_{i+1}| \geq \cdots \geq |\overline{v}_\ell| \geq 0.$$

Por conseguinte, em ambos os casos, temos $w x_{p_i} = u x_0^\ell \Big(\prod_{j=1}^\ell \overline{v}_j\Big) \in W_k$.

Mostrámos até ao momento que existe $w' \in W_k$ tal que $w x_{p_i} = w'$, para qualquer $1 \leq i \leq \ell$.

Antes de prosseguir a demonstração convém estabelecer mais algumas notações. Para $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ e $\ell = n - k$, designemos por $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_\ell, \tilde{w}_{\ell+1}$ as palavras $(k-1)$-principais, ou seja,

$$\tilde{w}_j \equiv x_{\ell-j+2} \cdots x_{\ell-j+k} \equiv x_{n-j+2-k} \cdots x_{n-j}, \quad 1 \leq j \leq \ell + 1.$$

Então, os elementos de W_{k-1} são todas as palavras da forma

$$\Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{u}_j\Big) x_0^{\ell+1} \Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{v}_j\Big),$$

em que $\tilde{u}_j$ é um sufixo de $\tilde{w}_j$ e $\tilde{v}_j$ é um prefixo de $\tilde{w}_j$, para $1 \leq j \leq \ell + 1$, com

$$0 \leq |\tilde{u}_1| \leq \cdots \leq |\tilde{u}_\ell| \leq |\tilde{u}_{\ell+1}| \leq k - 1 \quad \text{e} \quad k - 1 \geq |\tilde{v}_1| \geq \cdots \geq |\tilde{v}_\ell| \geq |\tilde{v}_{\ell+1}| \geq 0.$$

Passo 2.2. Em seguida, estudamos a palavra wx_0, supondo que x_0 não é uma letra associada a w (donde $r_1 < k$).

Seja $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Então, como $r_j \geq 1$ implica

$$1 \leq \ell - j + 1 \leq \ell - j + r_j \leq \ell - 1 + r_1 < \ell - 1 + k = n - 1,$$

obtemos

$$v_j x_0 \equiv (x_{\ell-j+1} \cdots x_{\ell-j+r_j})x_0 = x_0(x_{\ell-j+2} \cdots x_{\ell-j+r_j+1}),$$

aplicando as relações R_1 r_j vezes. Logo,

$$wx_0 \equiv ux_0^{\ell}\Big(\prod_{j=1}^{\ell} v_j\Big)x_0 = ux_0^{\ell+1}\Big(\prod_{j=1}^{\ell} (x_{\ell-j+2} \cdots x_{\ell-j+r_j+1})\Big) \equiv ux_0^{\ell+1}\Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{v}_j\Big),$$

em que $\tilde{v}_j \equiv x_{\ell-j+2} \cdots x_{\ell-j+r_j+1}$, para qualquer $1 \leq j \leq \ell$, e $\tilde{v}_{\ell+1} = 1$. Como $|\tilde{v}_j| = r_j \leq r_1 < k$, com $1 \leq j \leq \ell$, então $\tilde{v}_j$ é um prefixo de $\tilde{w}_j$, para qualquer $1 \leq j \leq \ell + 1$, e $k - 1 \geq |\tilde{v}_1| \geq \cdots \geq |\tilde{v}_\ell| \geq |\tilde{v}_{\ell+1}| = 0$.

Se $k = 1$ então $\ell + 1 = n$ e portanto, pela Proposição 2.4.4, temos

$$wx_0 = x_0^n \in W_0 = W_{k-1}.$$

Se $k \geq 2$ então $1 \leq \ell \leq n - 2$. Uma vez que $0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_\ell \leq k = n - \ell$, aplicando o Lema 2.4.6, obtemos

$$\begin{aligned} ux_0^{\ell+1} &\equiv \Big(\prod_{j=1}^{\ell} (x_{n-j+1-s_j} \cdots x_{n-j})\Big)x_0^{\ell+1} \\ &= \Big(\prod_{j=1}^{\ell} (x_{n-j+1-s_j} \cdots x_{n-j-1})\Big)x_0^{\ell+1} \\ &\equiv \Big(\prod_{j=2}^{\ell+1} (x_{n-j+2-s_{j-1}} \cdots x_{n-j})\Big)x_0^{\ell+1} \\ &\equiv \Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{u}_j\Big)x_0^{\ell+1}, \end{aligned}$$

em que $\tilde{u}_1 \equiv 1$ e $\tilde{u}_j = x_{n-j+2-s_{j-1}} \cdots x_{n-j}$, para qualquer $2 \leq j \leq \ell + 1$. Dado $2 \leq j \leq \ell+1$, se $s_{j-1} \geq 1$ então $|\tilde{u}_j| = s_{j-1} - 1 \leq k - 1 = |\tilde{w}_j|$ e as últimas letras de $\tilde{u}_j$ e $\tilde{w}_j$ coincidem, caso contrário $|\tilde{u}_j| = 0$, pelo que, em ambos os casos, $\tilde{u}_j$ é um sufixo de $\tilde{w}_j$. Visto que $\tilde{u}_1$ é trivialmente um sufixo de $\tilde{w}_1$ e $0 = |\tilde{u}_1| \leq |\tilde{u}_2| \leq \cdots \leq |\tilde{u}_{\ell+1}| \leq k-1$, temos

$$wx_0 = \Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{u}_j\Big)x_0^{\ell+1}\Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{v}_j\Big) \in W_{k-1}.$$

Passo 2.3. Seja $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ e consideremos a palavra $wx_{\ell-i+r_i}$, supondo que $x_{\ell-i+r_i}$ não é x_0 nem uma letra associada a w. Tomemos $q_i = \ell - i + r_i$. Observemos que, se $i = \ell$ então $r_\ell \geq 1$ (caso contrário $q_i = 0$). Por outro lado, se $1 \leq i \leq \ell - 1$ então $r_i > r_{i+1}$ (caso contrário $q_i = \ell - i + r_{i+1} = \ell - (i + 1) + r_{i+1} + 1 = p_{i+1}$), donde $r_i \geq 1$.

Admitamos que $1 \leq i \leq \ell - 1$. Para qualquer $j \in \{i+1, \ldots, \ell\}$, como $r_i > r_{i+1}$, então

$$(\ell - j + r_j) + 2 \leq (\ell - (i+1) + r_{i+1}) + 2 = \ell - i + r_{i+1} + 1 \leq \ell - i + r_i$$

e portanto, por R_2, temos

$$v_j x_{q_i} \equiv (x_{\ell-j+1} \cdots x_{\ell-j+r_j}) x_{\ell-i+r_i} = x_{\ell-i+r_i}(x_{\ell-j+1} \cdots x_{\ell-j+r_j}) \equiv x_{q_i} v_j.$$

Consequentemente

$$\Big(\prod_{j=1}^{\ell} v_j\Big) x_{q_i} = \Big(\prod_{j=1}^{i} v_j\Big) x_{q_i} \Big(\prod_{j=i+1}^{\ell} v_j\Big).$$

Notemos que esta igualdade é ainda válida para $i = \ell$.

A partir de agora, suponhamos pois $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Como $n - \ell \geq r_1 \geq \cdots \geq r_i \geq 1$ (e $1 \leq i \leq \ell \leq n-1$), pelo Lema 2.4.8, temos

$$\begin{aligned} x_0^{\ell}\Big(\prod_{j=1}^{\ell} v_j\Big) x_{q_i} &= (x_{r_i} \cdots x_{n-(\ell+1)}) x_0^{\ell+1} \Big(\prod_{j=1}^{i} (x_{\ell-j+2} \cdots x_{\ell-j+r_j})\Big) \\ &\quad (x_{\ell-i+1} \cdots x_{\ell-(i+1)+r_i}) \Big(\prod_{j=i+1}^{\ell} v_j\Big) \\ &\equiv u_{\ell+1} x_0^{\ell+1} \Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{v}_j\Big), \end{aligned}$$

em que $u_{\ell+1} = x_{r_i} \cdots x_{n-(\ell+1)}$ e

$$\tilde{v}_j \equiv \begin{cases} x_{\ell-j+2} \cdots x_{\ell-j+r_j}, & \text{se } 1 \leq j \leq i \\ x_{\ell-(i+1)+2} \cdots x_{\ell-(i+1)+r_i}, & \text{se } j = i+1 \\ v_{j-1} \equiv x_{\ell-j+2} \cdots x_{\ell-j+r_{j-1}+1}, & \text{se } i+2 \leq j \leq \ell+1. \end{cases}$$

Como $|\tilde{v}_j| = r_j - 1 \leq k - 1$, $1 \leq j \leq i$, e $|\tilde{v}_{i+1}| = r_i - 1 \leq k - 1$, é claro que $\tilde{v}_j$ é um prefixo de $\tilde{w}_j$, para qualquer $1 \leq j \leq i+1$. Por outro lado, para $j \in \{i+2, \ldots, \ell\}$ (se existir algum), temos $|\tilde{v}_j| = r_{j-1} \leq r_{i+1} < r_i \leq k$, pelo que $\tilde{v}_j$ é também um prefixo de $\tilde{w}_j$. Além disso,

$$k - 1 \geq r_1 - 1 \geq \cdots \geq r_i - 1 \geq r_{i+1} \geq \cdots \geq r_\ell \geq 0$$

e portanto

$$k - 1 \geq |\tilde{v}_1| \geq \cdots \geq |\tilde{v}_i| = |\tilde{v}_{i+1}| \geq |\tilde{v}_{i+2}| \geq \cdots \geq |\tilde{v}_{\ell+1}| \geq 0.$$

Se $k = 1$ então $\ell + 1 = n$ e portanto, pela Proposição 2.4.4, temos

$$w x_{q_i} = x_0^n \in W_0 = W_{k-1}.$$

Admitamos que $k \geq 2$. Como $r_i \geq 1$, então é óbvio que $u_{\ell+1}$ é um sufixo de $\tilde{w}_{\ell+1}$. Notemos que $u_{\ell+1} \equiv 1$ se e só se $r_i = k$.

Suponhamos em primeiro lugar que $r_i = k$. Como

$$1 \leq \ell \leq n-2 \quad \text{e} \quad 0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_\ell \leq n-\ell,$$

pelo Lema 2.4.6, temos

$$\begin{aligned}
\Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} u_j\Big) x_0^{\ell+1} &\equiv \Big(\prod_{j=1}^{\ell} (x_{n-j+1-s_j} \cdots x_{n-j})\Big) x_0^{\ell+1} \\
&= \Big(\prod_{j=1}^{\ell} (x_{n-j+1-s_j} \cdots x_{n-j-1})\Big) x_0^{\ell+1}.
\end{aligned}$$

Tomemos $\tilde{u}_1 \equiv 1$ e $\tilde{u}_j = x_{n-j+2-s_{j-1}} \cdots x_{n-j}$, para qualquer $2 \leq j \leq \ell+1$. Então $|\tilde{u}_1| = 0$ e $|\tilde{u}_j| = \max\{0, s_{j-1}-1\} \leq k-1$, com $2 \leq j \leq \ell+1$, pelo que $\tilde{u}_j$ é um sufixo de $\tilde{w}_j$, para qualquer $1 \leq j \leq \ell+1$, e $0 = |\tilde{u}_1| \leq |\tilde{u}_2| \leq \cdots \leq |\tilde{u}_{\ell+1}| \leq k-1$. Logo

$$wx_{q_i} = \Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{u}_j\Big) x_0^{\ell+1} \Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{v}_j\Big) \in W_{k-1}.$$

Suponhamos em seguida que $r_i < k$. Comecemos por admitir que $s_\ell \leq k - r_i$. Então $0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_\ell \leq k - r_i \leq k-1$ e portanto u_j é certamente um sufixo de $\tilde{w}_j$, para qualquer $1 \leq j \leq \ell$ (notemos que também $u_{\ell+1}$ é um sufixo de $\tilde{w}_{\ell+1}$). Além disso, $0 \leq |u_1| \leq \cdots \leq |u_\ell| = s_\ell \leq k - r_i = |u_{\ell+1}|$ e portanto

$$wx_{q_i} = \Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} u_j\Big) x_0^{\ell+1} \Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{v}_j\Big) \in W_{k-1}.$$

Admitamos agora que $k - r_i < s_\ell$ e tomemos o menor inteiro $t \in \{1, \ldots, \ell\}$ tal que $k - r_i < s_t$. Então

$$0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{t-1} \leq k - r_i < s_t \leq \cdots \leq s_\ell$$

e, tal como no caso anterior, u_j é certamente um sufixo de $\tilde{w}_j$, para qualquer $1 \leq j \leq t-1$. Tomemos $\tilde{u}_j \equiv u_j$, para qualquer $1 \leq j < t-1$. Por outro lado, uma vez que $1 \leq t \leq \ell \leq n-1$, $1 \leq r_i < k = n - \ell$ e

$$n - \ell - r_i = k - r_i < s_t \leq \cdots \leq s_\ell \leq k = n - \ell,$$

estamos nas condições do Lema 2.4.10 (recordemos que $|u_{\ell+1}| \geq 1$) e portanto

$$\begin{aligned}
\Big(\prod_{j=t}^{\ell+1} u_j\Big) &\equiv \Big(\prod_{j=t}^{\ell} u_j\Big) x_{r_i} (x_{r_i+1} \cdots x_{n-(\ell+1)}) \\
&= (x_{r_i+\ell-t+1} \cdots x_{n-t}) \Big(\prod_{j=t}^{\ell-1} (x_{n-j+1-s_j} \cdots x_{n-(j+1)})\Big) \\
&\quad\ (x_{n-\ell+1-s_\ell} \cdots x_{r_i})(x_{r_i+1} \cdots x_{n-(\ell+1)}) \\
&\equiv (x_{r_i+\ell-t+1} \cdots x_{n-t}) \Big(\prod_{j=t}^{\ell} (x_{n-(j+1)+2-s_j} \cdots x_{n-(j+1)})\Big) \\
&\equiv \Big(\prod_{j=t}^{\ell+1} \tilde{u}_j\Big),
\end{aligned}$$

com $\tilde{u}_t \equiv x_{r_i+\ell-t+1} \cdots x_{n-t}$ e $\tilde{u}_j = x_{n-j+2-s_{j-1}} \cdots x_{n-j}$, para qualquer $t+1 \leq j \leq \ell+1$. Como $\tilde{u}_t = k - r_i \leq k-1$ e $\tilde{u}_j = s_{j-1} - 1 \leq k-1$, com $t+1 \leq j \leq \ell+1$, então $\tilde{u}_j$ é um sufixo de $\tilde{w}_j$, para qualquer $t \leq j \leq \ell+1$. Além disso,

$$0 \leq |\tilde{u}_1| \leq \cdots \leq |\tilde{u}_{t-1}| = s_{t-1} \leq k - r_i = |\tilde{u}_t| \leq s_t - 1 = |\tilde{u}_{t+1}| \leq \cdots \leq s_\ell - 1 = |\tilde{u}_{\ell+1}|.$$

Logo

$$wx_{q_i} = \Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{u}_j\Big) x_0^{\ell+1} \Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{v}_j\Big) \in W_{k-1}.$$

Portanto, em qualquer dos casos, provámos que existe $w' \in W_{k-1}$ tal que $wx_{q_i} = w'$.

Passo 2.4. Finalmente, estudamos todas as palavras wx_t, com $0 \leq t \leq n-1$, que ainda não tenham sido estudadas, ou seja, todas as palavras wx_t, em que t pertence a um dos seguintes intervalos (de inteiros):

1. $I_\ell =]0, r_\ell[$;

2. $I_i =]\ell - i + r_{i+1}, \ell - i + r_i[$, com $1 \leq i \leq \ell - 1$;

3. $I_0 =]\ell + r_1, n[$.

Tomando $r_0 = n - \ell$ e $r_{\ell+1} = 0$, podemos então escrever $I_i =]\ell - i + r_{i+1}, \ell - i + r_i[$, para qualquer $0 \leq i \leq \ell$, cobrindo assim os três casos.

Seja $0 \leq i \leq \ell$ tal que $I_i \neq \emptyset$ e tomemos $t \in I_i$. Notemos que, se $I_i \neq \emptyset$ então $r_i \geq 2$ e portanto $r_j \geq 2$, para qualquer $j \in \{1, \ldots, i\}$ (se existir algum).

Tomemos $j \in \{i+1, \ldots, \ell\}$. Como

$$(\ell - j + r_j) + 2 \leq (\ell - (i+1) + r_{i+1}) + 2 = \ell - i + r_{i+1} + 1 \leq t,$$

aplicando R_2, obtemos $v_j x_t = x_t v_j$. Logo

$$\Big(\prod_{j=1}^{\ell} v_j\Big) x_t = \Big(\prod_{j=1}^{i} v_j\Big) x_t \Big(\prod_{j=i+1}^{\ell} v_j\Big).$$

Suponhamos que $i \geq 1$. Uma vez que $\ell - i \leq \ell - i + r_{i+1} < t$, então $\ell - i + 1 \leq t < \ell - i + r_i$ e portanto, pelo Lema 2.4.11, temos

$$\Big(\prod_{j=1}^{i} v_j\Big) x_t = (x_{t+i} \cdots x_{\ell-1+r_1}) \Big(\prod_{j=2}^{i} (x_{\ell-j+2} \cdots x_{\ell-j+r_j})\Big) (x_{\ell-i+1} \cdots x_t).$$

Além disso, visto que $t < \ell - i + r_i \leq \ell - i + r_1$, temos $t + i \leq \ell - 1 + r_1$ e

$$\begin{aligned} x_0^\ell (x_{t+i} \cdots x_{\ell-1+r_1}) &= x_0^\ell (x_{t+i} \cdots x_{n-1} x_0 x_1 \cdots x_{t+i})(x_{t+i+1} \cdots x_{\ell-1+r_1}) && \text{(por } \mathrm{R}_5\text{)} \\ &= (x_{t+i-\ell} \cdots x_{n-(\ell+1)}) x_0^{\ell+1} (x_1 \cdots x_{\ell-1+r_1}) && \text{(pelo Lema 2.4.5)} \\ &= (x_{t+i-\ell} \cdots x_{n-(\ell+1)}) x_0^{\ell+1} (x_{\ell+1} \cdots x_{\ell-1+r_1}). && \text{(pelo Lema 2.4.2)} \end{aligned}$$

Suponhamos agora que $i = 0$. Então $\ell \leq \ell + r_1 < t$ e portanto

$$\begin{aligned} x_0^\ell x_t &= x_0^\ell(x_t \cdots x_{n-1}x_0x_1 \cdots x_t) && \text{(por R}_5\text{)} \\ &= (x_{t-\ell} \cdots x_{n-(\ell+1)})x_0^{\ell+1}(x_1 \cdots x_t) && \text{(pelo Lema 2.4.5)} \\ &= (x_{t-\ell} \cdots x_{n-(\ell+1)})x_0^{\ell+1}(x_{\ell+1} \cdots x_t). && \text{(pelo Lema 2.4.2)} \end{aligned}$$

Logo, quer para $i = 0$ quer para $i \geq 1$, temos

$$x_0^\ell\Big(\prod_{j=1}^{\ell} v_j\Big)x_t = (x_{t+i-\ell} \cdots x_{n-(\ell+1)})x_0^{\ell+1}\Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{v}_j\Big),$$

em que

$$\tilde{v}_j \equiv \begin{cases} x_{\ell-j+2} \cdots x_{\ell-j+r_j}, & \text{se } 1 \leq j \leq i \\ x_{\ell-i+1} \cdots x_t, & \text{se } j = i+1 \\ v_{j-1} \equiv x_{\ell-j+2} \cdots x_{\ell-j+r_{j-1}+1}, & \text{se } i+2 \leq j \leq \ell+1. \end{cases}$$

É claro que $\tilde{v}_j$ é um prefixo de $\tilde{w}_j$ se e só se $|\tilde{v}_j| \leq k-1$, para qualquer $1 \leq j \leq \ell+1$. Se $j \in \{1, \ldots, i\}$ então $|\tilde{v}_j| = r_j - 1$ e, como $t < \ell - i + r_i$, temos

$$|\tilde{v}_{i+1}| = t - \ell + i \leq r_i - 1.$$

Consequentemente, $k - 1 \geq |\tilde{v}_1| \geq \cdots \geq |\tilde{v}_i| \geq |\tilde{v}_{i+1}|$. Além disso, para cada $i + 2 \leq j \leq \ell + 1$, como $\ell - i + r_{i+1} < t$, então

$$|\tilde{v}_j| = r_{j-1} \leq r_{i+1} < t - \ell + i = |\tilde{v}_{i+1}|.$$

Logo $\tilde{v}_j$ é um prefixo de $\tilde{w}_j$, para qualquer $1 \leq j \leq \ell+1$, e

$$k - 1 \geq |\tilde{v}_1| \geq \cdots \geq |\tilde{v}_{i+1}| > |\tilde{v}_{i+2}| \geq \cdots \geq |\tilde{v}_{\ell+1}| \geq 0.$$

Tomemos $u_{\ell+1} = x_{t+i-\ell} \cdots x_{n-(\ell+1)}$. Visto que $\ell + 1 \leq t + i \leq n - 1$, temos $1 \leq |u_{\ell+1}| = n - (t+i) \leq n - (\ell+1) = k - 1$ e é claro que $u_{\ell+1}$ é um sufixo de $\tilde{w}_{\ell+1}$. Suponhamos que $s_\ell \leq n - (t+i)$. Então

$$0 \leq |u_1| \leq \cdots \leq |u_\ell| \leq |u_{\ell+1}| \leq k-1$$

e portanto u_j é também um sufixo de $\tilde{w}_j$, para qualquer $1 \leq j \leq \ell$. Logo

$$wx_t = \Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} u_j\Big)x_0^{\ell+1}\Big(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{v}_j\Big) \in W_{k-1}.$$

Suponhamos agora que $n - (t+i) < s_\ell$ e tomemos o menor inteiro $p \in \{1, \ldots, \ell\}$ tal que $n - (t+i) < s_p$. Por conseguinte, temos

$$0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{p-1} \leq n - (t+i) < s_p \leq \cdots \leq s_\ell \leq k = n - \ell.$$

Seja $r = t + i - \ell$. Como $1 \leq t + i - \ell \leq n - (\ell + 1)$, então $1 \leq r < n - \ell$. Além disso,

$$n - \ell - r = n - (t + i) < s_p \leq \cdots \leq s_\ell \leq n - \ell,$$

e portanto, pelo Lema 2.4.10,

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{j=1}^{\ell+1} u_j\right) &\equiv \left(\prod_{j=1}^{p-1} u_j\right)\left(\left(\prod_{j=p}^{\ell} u_j\right)x_r\right)(x_{r+1}\cdots x_{n-(\ell+1)}) \\
&= \left(\prod_{j=1}^{p-1} u_j\right)(x_{r+\ell-p+1}\cdots x_{n-p})\left(\prod_{j=p}^{\ell-1}(x_{n-j+1-s_j}\cdots x_{n-(j+1)})\right) \\
&\quad (x_{n-\ell+1-s_\ell}\cdots x_r)(x_{r+1}\cdots x_{n-(\ell+1)}) \\
&\equiv \left(\prod_{j=1}^{p-1} u_j\right)(x_{t+i-p+1}\cdots x_{n-p})\left(\prod_{j=p}^{\ell}(x_{n-j+1-s_j}\cdots x_{n-(j+1)})\right) \\
&\equiv \left(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{u}_j\right),
\end{aligned}$$

em que

$$\tilde{u}_j \equiv \begin{cases} u_j, & \text{se } 1 \leq j \leq p-1 \\ x_{t+i-p+1}\cdots x_{n-p}, & \text{se } j = p \\ x_{n-j+2-s_{j-1}}\cdots x_{n-j}, & \text{se } p+1 \leq j \leq \ell+1. \end{cases}$$

Temos

$$0 \leq |\tilde{u}_1| \leq \cdots \leq |\tilde{u}_{p-1}| = s_{p-1} \leq n - (t+i) = |\tilde{u}_p| \leq s_p - 1 \leq k - 1$$

e $|\tilde{u}_j| = s_{j-1} - 1 \leq k - 1$, para qualquer $p + 1 \leq j \leq \ell + 1$. Logo, $\tilde{u}_j$ é um sufixo de $\tilde{w}_j$, para qualquer $1 \leq j \leq \ell + 1$, e $0 \leq |\tilde{u}_1| \leq \cdots \leq |\tilde{u}_{\ell+1}|$. Assim, uma vez mais,

$$wx_t = \left(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{u}_j\right) x_0^{\ell+1} \left(\prod_{j=1}^{\ell+1} \tilde{v}_j\right) \in W_{k-1}.$$

Passo 3. Tomemos $w \in W_n$, ou seja, $w \equiv 1$. Notemos que, sendo $w_1 \equiv x_1 \cdots x_{n-1}$ a única palavra $(n-1)$-principal, então

$$W_{n-1} = \{u_1 x_0 v_1 \mid u_1 \text{ um sufixo de } w_1 \text{ e } v_1 \text{ um prefixo de } w_1\}.$$

Logo,

$$wx_0 = x_0 \in W_{n-1}.$$

Por outro lado, por R_5, para qualquer $1 \leq i \leq n-1$, temos

$$wx_i = x_i = (x_i \cdots x_{n-1}) x_0 (x_1 \cdots x_i) \in W_{n-1}.$$

Fica assim terminada a prova deste resultado. ∎

Como observámos imediatamente a seguir à Proposição 1.7.2, temos agora como consequência da proposição anterior o seguinte resultado:

Corolário 2.4.13. *Dada uma palavra $w \in X^*$, então existe uma palavra $w' \in W$ tal que a relação $w = w'$ é uma consequência de* R. ∎

Seja $A = \{g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}\}$ o conjunto de geradores definido na secção 3 (Teorema 2.3.2). Temos o seguinte resultado:

Proposição 2.4.14. *O conjunto de geradores A do monóide $\mathcal{POI}_n$ satisfaz todas as relações de* R.

Demonstração. A seguinte convenção facilita a apresentação das verificações necessárias: dados $s \in \mathcal{POI}_n$ e $y \in \{0, 1, \ldots, n\}$, se $y \notin \mathrm{Dom}(s)$, escrevemos $ys = 0$.

1. Seja $1 \le i \le n-2$ e tomemos $y \in \{1, \ldots, n\}$. Se $y \notin \{n-i, n-i+1\}$ então

$$yg_ig_0 = yg_0 = y - 1 = (y-1)g_{i+1} = yg_0g_{i+1}.$$

Se $y = n - i$ então

$$yg_ig_0 = (y+1)g_0 = y = (y-1)g_{i+1} = yg_0g_{i+1}.$$

Finalmente, se $y = n - i + 1$ então

$$yg_ig_0 = 0g_0 = 0 = (y-1)g_{i+1} = yg_0g_{i+1}.$$

Logo, $g_ig_0 = g_0g_{i+1}$ e portanto A satisfaz R_1.

2. Sejam $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ tais que $2 \le i+1 < j \le n-1$. Tomemos $y \in \{1, \ldots, n\}$. Suponhamos que $y \notin \{n-j, n-j+1, n-i, n-i+1\}$. Então,

$$yg_jg_i = yg_i = y = yg_j = yg_ig_j.$$

Tendo em conta que $n - j < n - j + 1 < n - i < n - i + 1$, temos:

se $y = n - j$ então $y, y+1 \notin \{n-i, n-i+1\}$ e portanto

$$yg_jg_i = (y+1)g_i = y + 1 = yg_j = yg_ig_j;$$

se $y = n - j + 1$ então $y \notin \{n-i, n-i+1\}$, pelo que

$$yg_jg_i = 0g_i = 0 = yg_j = yg_ig_j;$$

se $y = n - i$ então $y, y+1 \notin \{n-j, n-j+1\}$ e portanto

$$yg_jg_i = yg_i = y + 1 = (y+1)g_j = yg_ig_j;$$

finalmente, se $y = n - i + 1$ então $y \notin \{n-j, n-j+1\}$, pelo que

$$yg_jg_i = yg_i = 0 = 0g_j = yg_ig_j.$$

Logo, $g_jg_i = g_ig_j$, donde A satisfaz R_2.

3. Em seguida, provamos que A satisfaz R_3. Ora,

$$1g_0^2g_1 = 1g_0^2 = 1g_{n-1}g_0^2 = 0 = 2g_0^2g_1 = 2g_0^2 = 2g_{n-1}g_0^2$$

e, para $y \in \{3, \ldots, n\}$, temos

$$yg_0^2g_1 = (y-1)g_0g_1 = (y-2)g_1 = y-2 = (y-1)g_0 = yg_0^2 = yg_{n-1}g_0^2.$$

Logo, $g_0^2g_1 = g_0^2 = g_{n-1}g_0^2$.

4. Seja $1 \leq i \leq n-2$ e tomemos $y \in \{1, \ldots, n\}$. Se $y \notin \{n-i-1, n-i, n-i+1\}$ então $yg_i = y = yg_{i+1}$, pelo que

$$yg_ig_{i+1}g_i = yg_{i+1}g_i = yg_{i+1}g_ig_{i+1} = y.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}(n-i-1)g_ig_{i+1}g_i &= (n-i-1)g_{i+1}g_i \\ &= (n-i-1)g_{i+1}g_ig_{i+1} \\ &= n-i+1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(n-i)g_ig_{i+1}g_i &= (n-i)g_{i+1}g_i \\ &= (n-i)g_{i+1}g_ig_{i+1} = 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(n-i+1)g_ig_{i+1}g_i &= (n-i+1)g_{i+1}g_i \\ &= (n-i+1)g_{i+1}g_ig_{i+1} = 0,\end{aligned}$$

pelo que $g_ig_{i+1}g_i = g_{i+1}g_i = g_{i+1}g_ig_{i+1}$. Logo, A satisfaz R_4.

5. Para cada $0 \leq i \leq n-1$, definimos $h_i = g_{i+1} \cdots g_{n-1}g_0g_1 \cdots g_{i-1}$. Provemos que h_i é o inverso de g_i, com $0 \leq i \leq n-1$. Consideremos em primeiro lugar $i = 0$. Seja $y \in \{1, \ldots, n-1\}$. Então,

$$\begin{aligned}yh_0 &= yg_1 \cdots g_{n-y-1}g_{n-y}g_{n-y+1} \cdots g_{n-1} \\ &= yg_{n-y}g_{n-y+1} \cdots g_{n-1} \\ &= (y+1)g_{n-y+1} \cdots g_{n-1} \\ &= y+1\end{aligned}$$

e

$$nh_0 = ng_1g_2 \cdots g_{n-1} = 0g_2 \cdots g_{n-1} = 0.$$

Logo, h_0 é o inverso de g_0 e portanto, em particular, $g_0g_1 \cdots g_{n-1}g_0 = g_0$. Em seguida, consideremos $1 \leq i \leq n-1$. Então, dado $y \in \{1, \ldots, n-i-1\}$, temos

$$\begin{aligned}yh_i &= y(g_{i+1} \cdots g_{n-y-1})g_{n-y}(g_{n-y+1} \cdots g_{n-1})g_0g_1 \cdots g_{i-1} \\ &= yg_{n-y}(g_{n-y+1} \cdots g_{n-1})g_0g_1 \cdots g_{i-1} \\ &= (y+1)(g_{n-y+1} \cdots g_{n-1})g_0g_1 \cdots g_{i-1} \\ &= (y+1)g_0g_1 \cdots g_{i-1} \\ &= yg_1 \cdots g_{i-1} \\ &= y.\end{aligned}$$

Por outro lado, $(n-i)h_i = 0$ e

$$\begin{aligned}(n-i+1)h_i &= (n-i+1)(g_{i+1}\cdots g_{n-1})g_0g_1\cdots g_{i-1}\\ &= (n-i+1)g_0g_1\cdots g_{i-1}\\ &= (n-i)g_1\cdots g_{i-1}\\ &= n-i.\end{aligned}$$

Finalmente, dado $y \in \{n-i+2,\dots,n\}$, temos

$$\begin{aligned}yh_i &= y(g_{i+1}\cdots g_{n-1})g_0g_1\cdots g_{i-1}\\ &= yg_0g_1\cdots g_{i-1}\\ &= (y-1)g_1\cdots g_{n-y}g_{n-y+1}g_{n-y+2}\cdots g_{i-1}\\ &= (y-1)g_{n-y+1}g_{n-y+2}\cdots g_{i-1}\\ &= yg_{n-y+2}\cdots g_{i-1}\\ &= y.\end{aligned}$$

Podemos assim concluir que h_i é o inverso de g_i e portanto, em particular, temos $g_ig_{i+1}\cdots g_{n-1}g_0g_1\cdots g_{i-1}g_i = g_i$. Logo, A satisfaz R_5.

6. Seja $1 \le i \le n-1$. Seja $h_i = g_{i+1}\cdots g_{n-1}g_0g_1\cdots g_{i-1}$. Tomemos $y \in \{1,\dots,n\}$. Se $y \notin \{n-i, n-i+1\}$ então $yh_ig_i^2 = yg_i^2$. Por outro lado, temos

$$(n-i)h_ig_i^2 = 0g_i^2 = 0 = (n-i+1)g_i = (n-i)g_i^2$$

e

$$(n-i+1)h_ig_i^2 = (n-i)g_i^2 = (n-i+1)g_i = 0 = 0g_i = (n-i+1)g_i^2,$$

pelo que

$$g_{i+1}\cdots g_{n-1}g_0g_1\cdots g_{i-1}g_i^2 = g_i^2,$$

donde A satisfaz R_6. A prova fica assim completa. ∎

Tomemos $1 \le k \le n-1$, $\ell = n-k$ e $w_1,\dots,w_\ell$ as palavras k-principais. Observemos que o número de sequências distintas da forma $(u_1,\dots,u_\ell)$, em que, para $1 \le j \le \ell$, u_j é um sufixo de w_j e $0 \le |u_1| \le \cdots \le |u_\ell| \le k$, é igual ao número de transformações (totais) crescentes de $\{1,\dots,\ell\}$ em $\{1,\dots,k+1\}$. Por outro lado, este número é igual ao número de *combinações com repetição de $k+1$ objectos tomando ℓ de cada vez*, i.e. (veja-se [20])

$$\binom{(k+1)+\ell-1}{(k+1)-1} = \binom{n}{k}.$$

Como o número de sequências distintas da forma $(v_1,\dots,v_\ell)$, em que, para $1 \le j \le \ell$, v_j um é prefixo de w_j e $k \ge |v_1| \ge \cdots \ge |v_\ell| \ge 0$, é igual ao número de sequências distintas da forma $(u_1, \dots, u_\ell)$, com u_j um sufixo de w_j, para qualquer $1 \leq j \leq \ell$, e $0 \leq |u_1| \leq \cdots \leq |u_\ell| \leq k$, então

$$|W_k| = \binom{n}{k}^2 = |J_k|,$$

em que $J_k = \{s \in \mathcal{POI}_n \mid |\operatorname{Im}(s)| = k\}$. Por conseguinte, pela Proposição 2.1.2, temos

$$|W| = |\mathcal{POI}_n|.$$

Finalmente, atendendo à Proposição 2.4.14, ao Corolário 2.4.13 e à igualdade anterior, estamos nas condições da Proposição 1.7.2, pelo que o resultado principal desta secção fica demonstrado.

Teorema 2.4.15. *O monóide $\mathcal{POI}_n$ é definido pela apresentação $\langle X \mid \mathrm{R} \rangle$.* ∎

Observemos que a apresentação para os monóides $\mathcal{POI}_n$, com $n \in \mathbb{N}$, que acabámos de exibir em geral não é independente (uma apresentação diz-se *independente* se não contém relações supérfluas). Por exemplo, para $n \in \{1, \dots, 6\}$, a relação $\mathrm{R}_{3\mathrm{b}}$ é supérflua. Este facto pode ser verificado usando o programa GAP da forma descrita no exemplo 2.4.1. Conjecturamos que, em geral, a relação $\mathrm{R}_{3\mathrm{b}}$ pode ser deduzida das restantes.

Apêndice

Consideremos o seguinte conjunto de geradores do monóide $\mathcal{POI}_4$:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para $k \in \{0, \dots, 4\}$, denotemos por J_k a $\mathcal{J}$-classe de $\mathcal{POI}_4$ dos elementos de característica k. Observemos, em primeiro lugar, que $x_0^{4-k} \in J_k$, para $k \in \{0, \dots, 3\}$.

Para $k = 1$, temos $x_0^3 = \binom{4}{1}$ e considerando o subgrafo RC_1 do grafo de Cayley à direita de $\mathcal{POI}_4$, obtemos

$$R_{x_0^3} = \{x_0^3, x_0^3 \cdot x_3, x_0^3 \cdot x_3 \cdot x_2, x_0^3 \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot x_1\}.$$

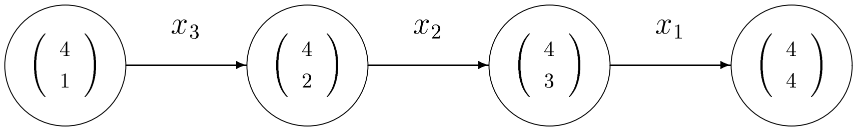

Figura 1: o grafo RC_1

A partir do subgrafo LC_1 do grafo de Cayley à esquerda de $\mathcal{POI}_4$, obtemos também

$$L_{x_0^3} = \{x_0^3, x_1 \cdot x_0^3, x_2 \cdot x_1 \cdot x_0^3, x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot x_0^3\}.$$

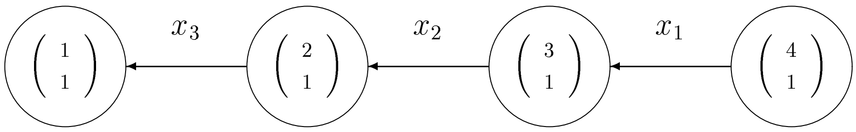

Figura 2: o grafo LC_1

Seguidamente, consideremos $k = 2$. Então $x_0^2 = \binom{3\ 4}{1\ 2}$ e a partir dos subgrafos RC_2 e LC_2 do grafo de Cayley à direita de $\mathcal{POI}_4$ e do grafo de Cayley à esquerda de $\mathcal{POI}_4$, respectivamente, obtemos

$$R_{x_0^2} = \{x_0^2, x_0^2 \cdot x_2, x_0^2 \cdot x_2 \cdot x_1, x_0^2 \cdot x_2x_3, x_0^2 \cdot x_2x_3 \cdot x_1, x_0^2 \cdot x_2x_3 \cdot x_1x_2\}$$

e

$$L_{x_0^2} = \{x_0^2, x_2 \cdot x_0^2, x_1x_2 \cdot x_0^2, x_3 \cdot x_2 \cdot x_0^2, x_3 \cdot x_1x_2 \cdot x_0^2, x_2x_3 \cdot x_1x_2 \cdot x_0^2\}.$$

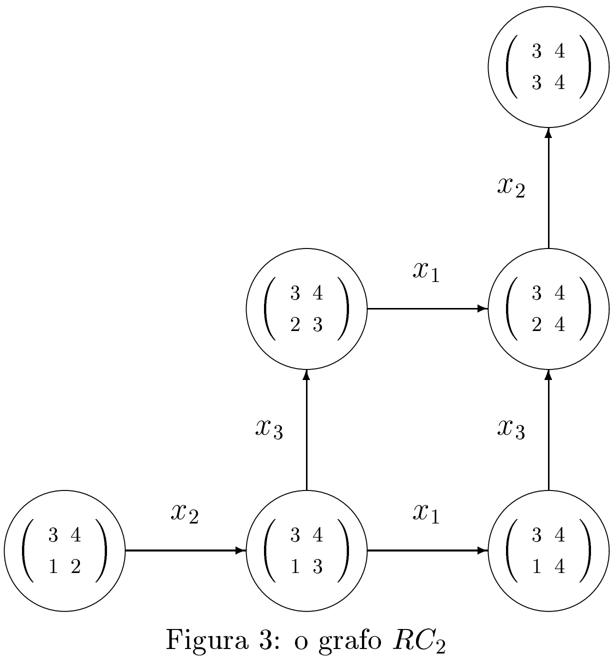

Figura 3: o grafo RC_2

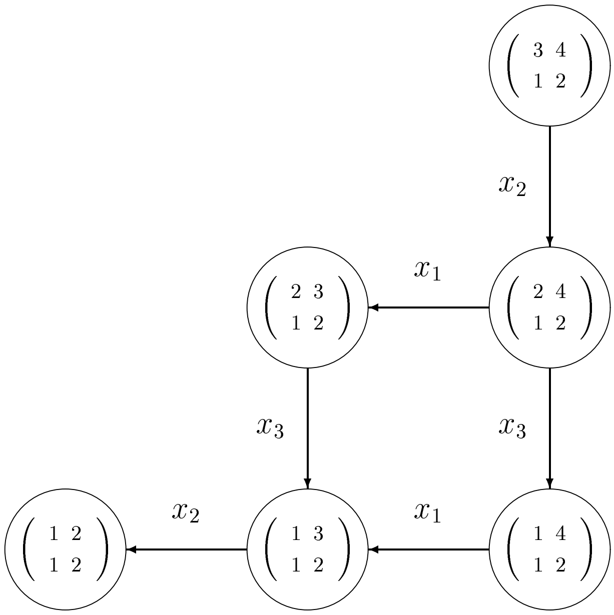

Figura 4: o grafo LC_2

Finalmente, para $k = 3$, temos

$$R_{x_0} = \{x_0, x_0 \cdot x_1, x_0 \cdot x_1x_2, x_0 \cdot x_1x_2x_3\}$$

e

$$L_{x_0} = \{x_0, x_3 \cdot x_0, x_2x_3 \cdot x_0, x_1x_2x_3 \cdot x_0\}$$

(vejam-se os grafos RC_3 e LC_3).

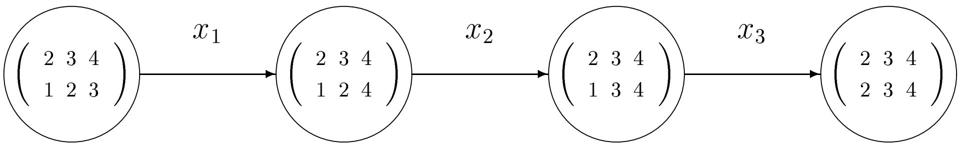

Figura 5: o grafo RC_3

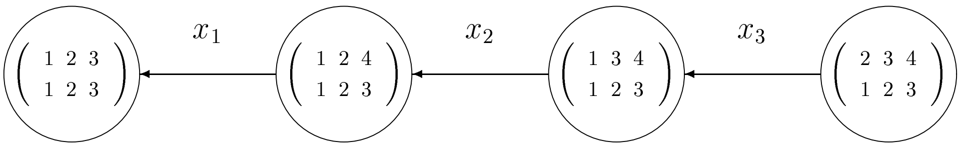

Figura 6: o grafo LC_3

Podemos então representar a estrutura de $\mathcal{POI}_4$ em $\mathcal{J}$-classes da seguinte forma:

$\boxed{\mathbf{1}}$

$\boldsymbol{x_1x_2x_3 \cdot x_0}$	$x_1x_2x_3 \cdot x_0 \cdot x_1$	$x_1x_2x_3 \cdot x_0 \cdot x_1x_2$	$x_1x_2x_3 \cdot x_0 \cdot x_1x_2x_3$
$\boldsymbol{x_2x_3 \cdot x_0}$	$x_2x_3 \cdot x_0 \cdot x_1$	$x_2x_3 \cdot x_0 \cdot x_1x_2$	$x_2x_3 \cdot x_0 \cdot x_1x_2x_3$
$\boldsymbol{x_3 \cdot x_0}$	$x_3 \cdot x_0 \cdot x_1$	$x_3 \cdot x_0 \cdot x_1x_2$	$x_3 \cdot x_0 \cdot x_1x_2x_3$
$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{x_0 \cdot x_1}$	$\boldsymbol{x_0 \cdot x_1x_2}$	$\boldsymbol{x_0 \cdot x_1x_2x_3}$

$\boldsymbol{x_2x_3 \cdot x_1x_2 \cdot x_0^2}$	$x_2x_3 \cdot x_1x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2$	$x_2x_3 \cdot x_1x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2 \cdot x_1$	$x_2x_3 \cdot x_1x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2x_3$	$x_2x_3 \cdot x_1x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2x_3 \cdot x_1$	$x_2x_3 \cdot x_1x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2x_3 \cdot x_1x_2$
$\boldsymbol{x_3 \cdot x_1x_2 \cdot x_0^2}$	$x_3 \cdot x_1x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2$	$x_3 \cdot x_1x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2 \cdot x_1$	$x_3 \cdot x_1x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2x_3$	$x_3 \cdot x_1x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2x_3 \cdot x_1$	$x_3 \cdot x_1x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2x_3 \cdot x_1x_2$
$\boldsymbol{x_3 \cdot x_2 \cdot x_0^2}$	$x_3 \cdot x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2$	$x_3 \cdot x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2 \cdot x_1$	$x_3 \cdot x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2x_3$	$x_3 \cdot x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2x_3 \cdot x_1$	$x_3 \cdot x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2x_3 \cdot x_1x_2$
$\boldsymbol{x_1x_2 \cdot x_0^2}$	$x_1x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2$	$x_1x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2 \cdot x_1$	$x_1x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2x_3$	$x_1x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2x_3 \cdot x_1$	$x_1x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2x_3 \cdot x_1x_2$
$\boldsymbol{x_2 \cdot x_0^2}$	$x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2$	$x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2 \cdot x_1$	$x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2x_3$	$x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2x_3 \cdot x_1$	$x_2 \cdot x_0^2 \cdot x_2x_3 \cdot x_1x_2$
$\boldsymbol{x_0^2}$	$\boldsymbol{x_0^2 \cdot x_2}$	$\boldsymbol{x_0^2 \cdot x_2 \cdot x_1}$	$\boldsymbol{x_0^2 \cdot x_2x_3}$	$\boldsymbol{x_0^2 \cdot x_2x_3 \cdot x_1}$	$\boldsymbol{x_0^2 \cdot x_2x_3 \cdot x_1x_2}$

$\boldsymbol{x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot x_0^3}$	$x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot x_0^3 \cdot x_3$	$x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot x_0^3 \cdot x_3 \cdot x_2$	$x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot x_0^3 \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot x_1$
$\boldsymbol{x_2 \cdot x_1 \cdot x_0^3}$	$x_2 \cdot x_1 \cdot x_0^3 \cdot x_3$	$x_2 \cdot x_1 \cdot x_0^3 \cdot x_3 \cdot x_2$	$x_2 \cdot x_1 \cdot x_0^3 \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot x_1$
$\boldsymbol{x_1 \cdot x_0^3}$	$x_1 \cdot x_0^3 \cdot x_3$	$x_1 \cdot x_0^3 \cdot x_3 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_0^3 \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot x_1$
$\boldsymbol{x_0^3}$	$\boldsymbol{x_0^3 \cdot x_3}$	$\boldsymbol{x_0^3 \cdot x_3 \cdot x_2}$	$\boldsymbol{x_0^3 \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot x_1}$

$\boxed{\boldsymbol{x_0^4}}$

(a cor mais escura estão assinalados os elementos dos grafos anteriores).

Capítulo 3

O monóide das transformações parciais injectivas que preservam a orientação sobre uma cadeia finita

Neste capítulo fazemos uma abordagem análoga à feita no capítulo anterior, desta vez elegendo o monóide $\mathcal{POPI}_n$, das transformações parciais injectivas que preservam a orientação sobre uma cadeia com n elementos ($n \in \mathbb{N}$), como objecto do nosso estudo. Assim, na primeira secção mostramos que $\mathcal{POPI}_n$ é um monóide inverso de $\mathcal{I}(X_n)$, determinamos o seu cardinal e apresentamos uma descrição das relações de Green. Na segunda secção, mostramos que $\mathcal{POPI}_n$ é gerado por dois elementos (mas não por menos), para qualquer $n \geq 2$. Seguidamente, na secção 3, exibimos descrições para os ideais e para o reticulado das congruências de $\mathcal{POPI}_n$. A última secção deste capítulo é dedicada à determinação de uma apresentação para estes monóides, para o que, à semelhança do que fizemos no capítulo anterior, procuramos encontrar um par (X, R) que satisfaça as condições da Proposição 1.7.2. As apresentações exibidas para os monóides $\mathcal{POPI}_n$ são construídas à custa das estabelecidas para os monóides $\mathcal{POI}_n$. Obtemos deste modo uma apresentação para $\mathcal{POPI}_n$ com $n+1$ geradores e $\frac{1}{2}(n^2+7n-2)$ relações. A partir desta, usando transformações de Tietze, deduzimos outra apresentação para $\mathcal{POPI}_n$ com apenas 2 geradores e o mesmo número de relações.

1. O monóide $\mathcal{POPI}_n$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Seja $X_n = \{1 < 2 < \cdots < n\}$ uma cadeia com n elementos. Dizemos que uma sequência $a = (a_1, a_2, \ldots, a_t)$ de t ($t \geq 0$) elementos de X_n é *cíclica* se não existir mais do que um índice $i \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $a_i > a_{i+1}$, convencionando que $a_{t+1} = a_1$. Observemos que a sequência a é cíclica se e só se a é constante ou existe um e um só índice $i \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $a_i > a_{i+1}$. Além disso, a sequência a é cíclica se e só se é vazia ou existe $i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$ tal que

$$a_{i+1} \leq a_{i+2} \leq \cdots \leq a_t \leq a_1 \leq \cdots \leq a_i. \tag{4}$$

Nas condições anteriores, o índice $i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$ é único, excepto se a for constante e $t \geq 2$. De facto, suponhamos que existe $j \in \{0, 1, \ldots, t-1\} \setminus \{i\}$ tal que

$$a_{j+1} \leq a_{j+2} \leq \cdots \leq a_t \leq a_1 \leq \cdots \leq a_j. \tag{5}$$

Então, $t \geq 2$ e, podemos admitir, sem perda de generalidade, que $i < j$. Assim, $i+1 \leq j$, pelo que, por (4), temos $a_{i+1} \leq a_j \leq a_t \leq a_1 \leq a_i$ e, por (5), temos $a_i \leq a_{i+1} \leq a_j$. Logo, $a_i = a_{i+1}$ e portanto a é uma sequência constante.

Seja $s \in \mathcal{PT}(X_n)$ e suponhamos que $\mathrm{Dom}(s) = \{a_1, \ldots, a_t\}$, com $a_1 < \cdots < a_t$ e $t \geq 0$. Dizemos que a transformação parcial s *preserva a orientação* se a sequência das suas imagens $(a_1 s, \ldots, a_t s)$ é cíclica, i.e. se existe no máximo um índice $i \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $a_i s > a_{i+1} s$. Denotamos por $\mathcal{POP}_n$ o subconjunto de $\mathcal{PT}(X_n)$ formado por todas as transformações (parciais) que preservam a orientação, por $\mathcal{OP}_n$ o subconjunto de $\mathcal{POP}_n$ de todas as transformações *totais* que preservam a orientação ($\mathcal{OP}_n = \mathcal{POP}_n \cap \mathcal{T}(X_n)$) e por $\mathcal{POPI}_n$ o subconjunto de $\mathcal{POP}_n$ de todas as transformações (parciais) *injectivas* que preservam a orientação ($\mathcal{POPI}_n = \mathcal{POP}_n \cap \mathcal{I}(X_n)$). É claro que $\mathcal{PO}_n \subseteq \mathcal{POP}_n$ e, consequentemente, $\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{OP}_n$ e $\mathcal{POI}_n \subseteq \mathcal{POPI}_n$. Observemos que, dado $s \in \mathcal{POP}_n$ tal que $\mathrm{Dom}(s) = \{a_1, \ldots, a_t\}$, com $t \geq 0$ e $a_1 < \cdots < a_t$, então $s \notin \mathcal{PO}_n$ se e só se existe $i \in \{1, \ldots, t-1\}$ tal que $a_i s > a_{i+1} s$.

Nesta secção, em primeiro lugar, demonstramos que $\mathcal{POP}_n$ é um submonóide regular de $\mathcal{PT}(X_n)$ e que $\mathcal{POPI}_n$ é um submonóide inverso de $\mathcal{I}(X_n)$. Observemos que P. Catarino e P. Higgins mostraram em [8] que $\mathcal{OP}_n$ constitui um submonóide regular de $\mathcal{T}(X_n)$. Seguidamente, concentramos a nossa atenção nos monóides $\mathcal{POPI}_n$ ($n \in \mathbb{N}$), apresentando uma descrição da sua estrutura de Green e calculando o seu cardinal. Começamos por demonstrar a seguinte propriedade:

Proposição 3.1.1. *A restrição de uma transformação de $\mathcal{POP}_n$ é ainda um elemento de $\mathcal{POP}_n$.*

Demonstração. Sejam $s \in \mathcal{POP}_n$ e t uma restrição não vazia de s. Se s é crescente, então t é também crescente, donde $t \in \mathcal{POP}_n$. Suponhamos que s não é crescente e tomemos $\mathrm{Dom}(s) = \{a_1 < \cdots < a_k\}$ e $\mathrm{Dom}(t) = \{b_1 < \cdots < b_p\}$ (com $1 \leq p \leq k \leq n$). Então, existe $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ tal que $a_i s > a_{i+1} s$ e

$$a_{i+1} s \leq \cdots \leq a_k s \leq a_1 s \leq \cdots \leq a_i s.$$

Tendo em conta que a_i e a_{i+1} são elementos consecutivos do domínio de s, então

$$b_1 < \cdots < b_j \leq a_i < a_{i+1} \leq b_{j+1} < \cdots < b_p,$$

para certo $j \in \{0, 1, \ldots, p\}$. Logo,

$$b_{j+1}s \leq \cdots \leq b_p s \leq b_1 s \leq \cdots \leq b_j s,$$

pelo que $t \in \mathcal{POP}_n$ (observemos que, se $j \in \{0, p\}$ então $t \in \mathcal{PO}_n$), como queríamos demonstrar. ∎

O próximo resultado generaliza o Lema 2.1 de [8] e na sua prova usamos argumentos similares aos aí aplicados.

Lema 3.1.2. *Sejam $s \in \mathcal{POP}_n$ e $(b_1, \ldots, b_p)$ ($p \geq 1$) uma sequência cíclica de elementos de* Dom(s). *Então a sequência $(b_1 s, \ldots, b_p s)$ é também cíclica.*

Demonstração. Seja $\mathrm{Dom}(s) = \{a_1 < \cdots < a_k\}$ $(k \geq p)$. Uma vez que $(b_1, \ldots, b_p)$ e $(a_1 s, \ldots, a_k s)$ são cíclicas, então existe $i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ tal que

$$b_{i+1} \leq b_{i+2} \leq \cdots \leq b_p \leq b_1 \leq \cdots \leq b_i$$

e existe $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ tal que

$$a_{j+1}s \leq a_{j+2}s \leq \cdots \leq a_k s \leq a_1 s \leq \cdots \leq a_j s. \tag{6}$$

Em particular, as restrições de s a $\{a_{j+1}, \ldots, a_k\}$ e a $\{a_1, \ldots, a_j\}$ são transformações crescentes. Logo se $b_{i+1} \geq a_{j+1}$ ou se $b_i \leq a_j$, então

$$b_{i+1}s \leq b_{i+2}s \leq \cdots \leq b_p s \leq b_1 s \leq \cdots \leq b_i s$$

e, portanto, a sequência $(b_1 s, \ldots, b_p s)$ é cíclica. Suponhamos então que $b_{i+1} < a_{j+1}$ e $b_i > a_j$. Uma vez que a_j e a_{j+1} são elementos consecutivos do domínio de s e $b_i \in \mathrm{Dom}(s)$, então $a_{j+1} \leq b_i$ (caso contrário teríamos $a_j < b_i < a_{j+1}$). Assim, $b_{i+1} < a_{j+1} \leq b_i$, pelo que $b_p < a_{j+1} \leq b_1$ ou existe $r \in \{2, \ldots, i, i+2, \ldots, p\}$ tal que $b_{r-1} < a_{j+1} \leq b_r$. Logo, existe r tal que $i+1 < r \leq p$ e

$$b_{i+1}, \ldots, b_{r-1} \in \{a_1, \ldots, a_j\} \quad \text{e} \quad b_r, \ldots, b_p, b_1, \ldots, b_i \in \{a_{j+1}, \ldots, a_k\},$$

ou existe r tal que $1 \leq r \leq i$ e

$$b_{i+1}, \ldots, b_p, b_1, \ldots, b_{r-1} \in \{a_1, \ldots, a_j\} \quad \text{e} \quad b_r, \ldots, b_i \in \{a_{j+1}, \ldots, a_k\}$$

Em ambos os casos, atendendo a (6), podemos concluir que

$$b_r s \leq \cdots \leq b_p s \leq b_1 s \leq \cdots \leq b_{r-1}s,$$

pelo que $(b_1 s, \ldots, b_p s)$ é uma sequência cíclica. ∎

A partir da Proposição 3.1.1 e do Lema 3.1.2 podemos deduzir que $\mathcal{POP}_n$ é um submonóide de $\mathcal{PT}(X_n)$. De facto, sejam $s, t \in \mathcal{POP}_n$. Se st é a transformação vazia então $st \in \mathcal{POP}_n$. Suponhamos que st é não vazia. Sejam $p \geq 1$ e $a_1, \ldots, a_p \in \mathrm{Dom}(s)$ tais que $a_1 < \cdots < a_p$ e $\mathrm{Dom}(st) = \{a_1, \ldots, a_p\}$. Visto que a restrição de s a $\mathrm{Dom}(st)$ é ainda uma transformação que preserva a orientação (pela Proposição 3.1.1), então a sequência das suas imagens $(a_1s, \ldots, a_ps)$ é cíclica. Logo, pelo Lema 3.1.2 a sequência $(a_1st, \ldots, a_pst)$ é cíclica, i.e. $st \in \mathcal{POP}_n$. Consequentemente, $\mathcal{POP}_n$ é um submonóide de $\mathcal{PT}(X_n)$ e $\mathcal{POPI}_n(= \mathcal{POP}_n \cap \mathcal{I}(X_n))$ é um submonóide de $\mathcal{I}(X_n)$. Além disso, temos:

Proposição 3.1.3. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $\mathcal{POP}_n$ é um submonóide regular de $\mathcal{PT}(X_n)$ e $\mathcal{POPI}_n$ é um submonóide inverso de $\mathcal{I}(X_n)$.*

Demonstração. Basta mostrar que, dado $s \in \mathcal{POP}_n$, existe $t \in \mathcal{POPI}_n$ tal que $s = sts$. Tomemos $s \in \mathcal{POP}_n$. Se $s = 0$ (a transformação vazia), tomemos $t = 0$. Suponhamos então que s não é a transformação vazia. Sejam $p = |\mathrm{Im}(s)| \geq 1$ e $\{a_1, \ldots, a_p\}$ um subconjunto de $\mathrm{Dom}(s)$ tal que $a_1 < \cdots < a_p$ e $\mathrm{Im}(s) = \{a_1s, \ldots, a_ps\}$. Seja t a transformação de X_n definida por $\mathrm{Dom}(t) = \mathrm{Im}(s)$ e $(a_is)t = a_i$, para qualquer $i \in \{1, \ldots, p\}$. Então t é uma transformação injectiva tal que $s = sts$. Falta agora provar que t preserva a orientação. Como a restrição de s a $\{a_1, \ldots, a_p\}$ preserva a orientação (pela Proposição 3.1.1), então existe $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ tal que

$$a_{j+1}s \leq a_{j+2}s \leq \cdots \leq a_ps \leq a_1s \leq \cdots \leq a_js$$

(notemos que o índice j é único e todas estas desigualdades são estritas). Logo, a sequência das imagens de t é $(a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_p, a_1, \ldots, a_j)$ a qual é uma sequência cíclica. Consequentemente, $t \in \mathcal{POPI}_n$. ■

Visto que $\mathcal{POPI}_n$ é um submonóide inverso de $\mathcal{I}(X_n)$, tendo em conta a Proposição 1.3.11 e a descrição enunciada na Proposição 1.3.1, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.1.4. *Sejam $s, t \in \mathcal{POPI}_n$. Então:*

1. *$s\,\mathcal{R}\,t$ se e só se $\mathrm{Dom}(s) = \mathrm{Dom}(t)$;*

2. *$s\,\mathcal{L}\,t$ se e só se $\mathrm{Im}(s) = \mathrm{Im}(t)$.* ■

Seguidamente, apresentamos uma descrição da relação de Green $\mathcal{J}$ em $\mathcal{POPI}_n$.

Proposição 3.1.5. *Sejam $s, t \in \mathcal{POPI}_n$. Então $s \leq_{\mathcal{J}} t$ se e só se $|\mathrm{Im}(s)| \leq |\mathrm{Im}(t)|$. Além disso, $s\,\mathcal{J}\,t$ se e só se $|\mathrm{Im}(s)| = |\mathrm{Im}(t)|$.*

Demonstração. Sejam $s, t \in \mathcal{POPI}_n$. Admitamos primeiramente que $|\operatorname{Im}(s)| \leq |\operatorname{Im}(t)|$. Tomemos $s', t' \in \mathcal{POI}_n$ tais que $\operatorname{Im}(s') = \operatorname{Im}(s)$ e $\operatorname{Im}(t') = \operatorname{Im}(t)$. Como $|\operatorname{Im}(s')| = |\operatorname{Im}(s)| \leq |\operatorname{Im}(t)| = |\operatorname{Im}(t')|$, então $s' \leq_{\mathcal{J}} t'$ em $\mathcal{POI}_n$ (pela Proposição 2.1.4), donde $s' \leq_{\mathcal{J}} t'$ em $\mathcal{POPI}_n$. Logo, como $s'\mathcal{L}s$ e $t'\mathcal{L}t$ (pela Proposição 3.1.4), temos $s \leq_{\mathcal{J}} t$ em $\mathcal{POPI}_n$. Reciprocamente, se $s \leq_{\mathcal{J}} t$ então $s = xty$, para alguns $x, y \in \mathcal{POPI}_n$, e portanto $|\operatorname{Im}(s)| \leq |\operatorname{Im}(ty)| = |(\operatorname{Im}(t))y| \leq |\operatorname{Im}(t)|$, como queríamos demonstrar. ∎

Resulta da proposição anterior que, para a ordem parcial $\leq_{\mathcal{J}}$, o quociente de $\mathcal{POPI}_n$ por $\mathcal{J}$ é uma cadeia com $n+1$ elementos. Mais precisamente,

$$\mathcal{POPI}_n/\mathcal{J} = \{J_0 <_{\mathcal{J}} J_1 <_{\mathcal{J}} \cdots <_{\mathcal{J}} J_n\},$$

em que $J_k = \{s \in \mathcal{POPI}_n \mid |\operatorname{Im}(s)| = k\}$, para qualquer $0 \leq k \leq n$.

Proposição 3.1.6. *Seja $s \in \mathcal{POPI}_n$ tal que $1 \leq |\operatorname{Im}(s)| = k \leq n$. Então $|H_s| = k$. Além disso, se s é um idempotente então H_s é um grupo cíclico de ordem k.*

Demonstração. Tomemos $s \in \mathcal{POPI}_n$ tal que $1 \leq |\operatorname{Im}(s)| = k \leq n$. Tendo em conta que $\mathcal{POPI}_n$ é um monóide regular, é suficiente mostrar que, se s é um idempotente então H_s é um grupo cíclico de ordem k. Admitamos que s é um idempotente. Seja $\operatorname{Dom}(s) = \{a_1 < \ldots < a_k\}$. Consideremos

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_k & a_1 \end{pmatrix}.$$

Pela Proposição 3.1.4, temos $g \in H_s$. Então g gera um grupo G de ordem k e $G \subseteq H_s$. Tomemos $t \in H_s$. Seja $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ tal que

$$a_{j+1}t < a_{j+2}t < \cdots < a_k t < a_1 t < \cdots < a_j t.$$

Logo, como $\operatorname{Im}(t) = \operatorname{Im}(s) = \operatorname{Dom}(s) = \{a_1 < \ldots < a_k\}$, temos

$$a_{j+1}t = a_1, a_{j+2}t = a_2, \ldots, a_k t = a_{k-j}, a_1 t = a_{k-j+1}, \ldots, a_j t = a_k,$$

pelo que $t = g^{k-j} \in G$. Assim, também $H_s \subseteq G$ e portanto H_s é um grupo cíclico de ordem k. ∎

Uma vez que qualquer subgrupo de um grupo cíclico é também cíclico (veja-se [7]), obtemos o seguinte corolário:

Corolário 3.1.7. *Os grupos de $\mathcal{POPI}_n$ são cíclicos de ordem menor ou igual a n. Além disso:*

1. *J_n é um grupo cíclico de ordem n;*

2. *Para $1 \leq k \leq n$, os $\binom{n}{k}$ grupos maximais de $\mathcal{POPI}_n$ contidos em J_k são cíclicos de ordem k;*

3. *$J_0 = \{0\}$ é um grupo cíclico de ordem 1.* ■

Tendo em conta a estrutura de Green de $\mathcal{POPI}_n$, podemos calcular o seu cardinal:

Corolário 3.1.8. *O monóide $\mathcal{POPI}_n$ tem $1 + \frac{n}{2}\binom{2n}{n} = 1 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2$ elementos.* ■

Observemos que

$$|\mathcal{POPI}_n| = 1 + n|\mathcal{O}_n| = 1 + \frac{n}{2}|\mathcal{POI}_n| = 1 + n(n-1) + |\mathcal{OP}_n|$$

(vejam-se [21], [8] e a Proposição 2.1.2).

Vimos no capítulo anterior (Proposição 2.1.5) que, para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$, o monóide $\mathcal{POI}_n \times \mathcal{POI}_m$ é, a menos de um isomorfismo, um submonóide de $\mathcal{POI}_{n+m}$. Referimos, a propósito, que inúmeras famílias de semigrupos de transformações gozam deste tipo de propriedade (veja-se [22]). No entanto, tal não é o caso da família de monóides $\mathcal{POPI}_n$, $n \in \mathbb{N}$, como podemos deduzir a partir da Proposição 3.1.6. Mais ainda, temos:

Corolário 3.1.9. *Sejam $n, m \geq 2$. Então, o monóide $\mathcal{POPI}_n \times \mathcal{POPI}_m$ não divide $\mathcal{POPI}_k$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Suponhamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{POPI}_n \times \mathcal{POPI}_m$ divide $\mathcal{POPI}_k$. Então, existem um subsemigrupo S de $\mathcal{POPI}_k$ e um homomorfismo sobrejectivo φ de S sobre $\mathcal{POPI}_n \times \mathcal{POPI}_m$. Uma vez que $n, m \geq 2$, podemos tomar grupos H_1 e H_2 de ordem dois de $\mathcal{POPI}_n$ e de $\mathcal{POPI}_m$, respectivamente. Atendendo à Proposição 1.1.3, existe um grupo G de S tal que $G\varphi = H_1 \times H_2$. Ora, pelo Corolário 3.1.7, G é um grupo cíclico, pelo que $H_1 \times H_2$ é um grupo cíclico, o que é falso (veja-se [27]). Portanto, o monóide $\mathcal{POPI}_n \times \mathcal{POPI}_m$ não divide $\mathcal{POPI}_k$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$. ■

2. A característica de $\mathcal{POPI}_n$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Consideremos a seguinte permutação de $\{1, \ldots, n\}$:

$$g_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $g_n \in \mathcal{POPI}_n$ e

$$g_n^i = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & \cdots & n-i & n-i+1 & \cdots & n \\ i+1 & i+2 & \cdots & n & 1 & \cdots & i \end{array}\right),$$

para qualquer $0 \leq i \leq n-1$.

De um modo análogo à factorização de P. Catarino e P. Higgins [8, Teorema 2.6] para uma transformação total que preserva a orientação, temos a seguinte factorização para um elemento de $\mathcal{POPI}_n$:

Proposição 3.2.1. *Seja s um elemento de $\mathcal{POPI}_n$. Então, existem $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $t \in \mathcal{POI}_n$ tais que $s = g_n^i t$.*

Demonstração. Tomemos $s \in \mathcal{POPI}_n$. Se $s \in \mathcal{POI}_n$, o resultado fica provado tomando $t = s$ e $i = 0$. Admitamos então que $s \notin \mathcal{POI}_n$. Seja $k \in \{1, \ldots, n\}$ a característica de s e suponhamos que $\mathrm{Dom}(s) = \{i_1 < \cdots < i_k\}$. Seja $r \in \{1, \ldots, k-1\}$ tal que $i_r s > i_{r+1} s$. Então,

$$i_{r+1}s < \cdots < i_k s < i_1 s < i_2 s < \cdots < i_r s.$$

Seja $h = g_n^{n-i_r}$. Logo

$$h = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & \cdots & i_r & i_r+1 & \cdots & n \\ n-i_r+1 & n-i_r+2 & \cdots & n & 1 & \cdots & n-i_r \end{array}\right).$$

Seja $t \in \mathcal{POI}_n$ definido por $\mathrm{Dom}(t) = (\mathrm{Dom}(s))h$ e $\mathrm{Im}(t) = \mathrm{Im}(s)$. Uma vez que

$$(i_r+1)h < \cdots < nh < 1h < 2h < \cdots < i_r h$$

e $i_r + 1 \leq i_{r+1}$, então

$$i_{r+1}h < \cdots < i_k h < i_1 h < i_2 h < \cdots < i_r h,$$

pelo que

$$t = \left(\begin{array}{ccc|ccc} i_{r+1}h & \cdots & i_k h & i_1 h & \cdots & i_r h \\ i_{r+1}s & \cdots & i_k s & i_1 s & \cdots & i_r s \end{array}\right).$$

Logo, $s = ht$, como queríamos demonstrar. ∎

A factorização deste tipo, de P. Catarino e P. Higgins, de uma transformação total que preserva a orientação é única, excepto para uma transformação constante. Porém, tal não é o caso para uma transformação parcial injectiva que preserva a orientação, como mostramos no exemplo seguinte.

Exemplo 3.2.1. Tomemos $n = 6$, $g = g_6$ e

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $1s > 3s$, então, pela prova da Proposição 3.2.1, temos $s = g^{6-1}t$, com $t \in \mathcal{POI}_6$ definido por $\mathrm{Dom}(t) = (\{1,3,4\})g^5 = \{2,3,6\}$ e $\mathrm{Im}(t) = \{1,3,4\}$:

$$t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

No entanto, esta factorização de s não é a única deste tipo. De facto, tomando $t' \in \mathcal{POI}_6$ definido por $\mathrm{Dom}(t') = \{1,2,5\}$ e $\mathrm{Im}(t) = \{1,3,4\}$ (notemos que $t' \neq t$), também temos $s = g^4 t'$.

Como consequência da Proposição 3.2.1, temos:

Corolário 3.2.2. *O monóide $\mathcal{POPI}_n$ é gerado por $\mathcal{POI}_n \cup \{g_n\}$.* ■

Consideremos os elementos $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ de $\mathcal{POI}_n$ definidos no capítulo 2 (imediatamente antes do Teorema 2.3.2). Recordemos que:

$$g_0 = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

e, para $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$,

$$g_i = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & \cdots & n-i-1 & n-i & n-i+2 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & n-i-1 & n-i+1 & n-i+2 & \cdots & n \end{array}\right).$$

Mostrámos, no Teorema 2.3.2, que $\{g_0, \ldots, g_{n-1}\}$ é um conjunto de geradores de $\mathcal{POI}_n$. Logo:

Corolário 3.2.3. *Seja $A = \{g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}, g_n\}$. Então, A é um conjunto de geradores do monóide $\mathcal{POPI}_n$.* ■

Em [9] P. Catarino mostrou que o monóide $\mathcal{OP}_n$ é gerado apenas por dois elementos. Não é de surpreender que o mesmo ocorra para $\mathcal{POPI}_n$. De facto, provamos a seguir que o monóide $\mathcal{POPI}_n$, com $n \geq 2$, tem característica igual a dois. Antes disso, necessitamos provar o seguinte lema:

Lema 3.2.4. *Seja $n \geq 2$. Então*

1. $g_0 = g_n^{n-1}(g_1g_n)^{n-1}$;
2. $g_i = g_n^{i-1}g_1g_n^{n-i+1}$, *para qualquer* $1 \leq i \leq n-1$.

Demonstração. Relativamente à primeira igualdade, temos

$$\begin{aligned} g_1g_n &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & \cdots & n-2 & n \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{cccc} 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 2 & \cdots & n-1 & 1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

e portanto

$$(g_1g_n)^{n-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 \end{array}\right).$$

Como

$$g_n^{n-1} = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{array}\right),$$

então

$$g^{n-1}(g_1g_n)^{n-1} = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{array}\right) = g_0.$$

Seguidamente, provamos a segunda igualdade. Seja $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Como

$$g_n^{i-1} = \left(\begin{array}{cccc|c|c|ccc} 1 & 2 & \cdots & n-i-1 & n-i & n-i+1 & n-i+2 & \cdots & n \\ i & i+1 & \cdots & n-2 & n-1 & n & 1 & \cdots & i-1 \end{array}\right),$$

então

$$g_n^{i-1}g_1 = \left(\begin{array}{cccc|c|ccc} 1 & 2 & \cdots & n-i-1 & n-i & n-i+2 & \cdots & n \\ i & i+1 & \cdots & n-2 & n & 1 & \cdots & i-1 \end{array}\right).$$

Por outro lado, temos

$$g_n^{n-i+1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & i-1 & i & \cdots & n \\ n-i+2 & \cdots & n & 1 & \cdots & n-i+1 \end{array}\right),$$

pelo que

$$g_n^{i-1}g_1g_n^{n-i+1} = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & \cdots & n-i-1 & n-i & n-i+2 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & n-i-1 & n-i+1 & n-i+2 & \cdots & n \end{array}\right) = g_i,$$

como queríamos demonstrar. ■

Estamos agora em condições de demonstrar o resultado principal desta secção.

Teorema 3.2.5. *Sejam $n \geq 2$ e $B = \{g_1, g_n\}$. Então B é um conjunto de geradores do monóide $\mathcal{POPI}_n$. Além disso, $\mathcal{POPI}_n$ (como monóide e como semigrupo) tem característica 2.*

Demonstração. Em primeiro lugar, observemos que, da combinação do Corolário 3.2.3 com o Lema 3.2.4, resulta que B é um conjunto de geradores de $\mathcal{POPI}_n$ (como monóide e, visto que $g_n^n = 1$, também como semigrupo). Uma vez que B tem dois elementos, a característica de $\mathcal{POPI}_n$ é 2 ou 1. Por outro lado, como uma permutação de $\{1, \ldots, n\}$ gera exclusivamente permutações de $\{1, \ldots, n\}$ e um elemento de $\mathcal{POPI}_n$ com característica menor ou igual a $n-1$ não pode gerar uma permutação de $\{1, \ldots, n\}$, então $\mathcal{POPI}_n$ não é gerado por um único elemento. Logo $\mathcal{POPI}_n$ (como monóide e como semigrupo) tem característica 2. ■

Observemos que $\mathcal{POPI}_1$, como semigrupo, tem também característica 2. No entanto, como monóide, $\mathcal{POPI}_1$ tem característica 1.

3. Os ideais e as congruências de $\mathcal{POPI}_n$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que $(\mathcal{POPI}_n/\mathcal{J}, \leq_{\mathcal{J}})$ é uma cadeia com $n+1$ elementos, como consequência imediata da Proposição 1.3.13, temos:

Teorema 3.3.1. *O monóide $\mathcal{POPI}_n$ possui $n+1$ ideais, os quais são ideais principais. Mais precisamente, os ideais de $\mathcal{POPI}_n$ são os subconjuntos da forma*

$$I_k = \{s \in \mathcal{POPI}_n \mid 0 \leq |\operatorname{Im}(s)| \leq k\},$$

com $k \in \{0, \ldots, n\}$, tendo-se $\{0\} = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n = \mathcal{POPI}_n$. ■

Seguidamente, é nosso objectivo obter uma descrição para as congruências do monóide $\mathcal{POPI}_n$. Com esta meta em vista, começamos por estabelecer alguns resultados auxiliares.

Consideremos um semigrupo finito S e uma sua $\mathcal{J}$-classe J. Denotemos por $B(J)$ o conjunto de todos os elementos s de S que satisfazem a condição $J \not\leq_{\mathcal{J}} J_s$. Então $B(J)$ (e também $B(J) \cup J$) é um ideal de S. Associada à $\mathcal{J}$-classe J está definida uma relação π_J em S do seguinte modo: para quaisquer $s, t \in S$, $s\,\pi_J t$ se e só se

1. $s = t$; ou

2. $s, t \in B(J)$; ou

3. $s, t \in J$ e $s \mathcal{H} t$.

Temos então:

Lema 3.3.2. *Sejam S um semigrupo finito e J uma $\mathcal{J}$-classe de S. Então, a relação π_J é uma congruência de S.*

Demonstração. Seja $\pi = \pi_J$. Não há dúvida que π é uma relação de equivalência de S. Resta-nos então provar que π é compatível com a multiplicação. Tomemos $s, t \in S$ tais que $s \, \pi \, t$. Seja $x \in S$. Se $s = t$ então $xs = xt$, pelo que $xs \, \pi \, xt$. Se $s, t \in B(J)$, visto que $B(J)$ é um ideal de S, temos $xs, xt \in B(J)$, donde $xs \, \pi \, xt$. Suponhamos agora que $s, t \in J$ e $s \mathcal{H} t$. Então, em particular, $s \mathcal{R} t$, pelo que $xs \mathcal{R} xt$. Consequentemente, $xs, xt \in B(J)$ ou $xs, xt \in J$. Se $xs, xt \in B(J)$, então $xs \, \pi \, xt$. Admitamos que $xs, xt \in J$. Uma vez que S é finito, como $s \mathcal{J} xs$ então $s \mathcal{L} xs$ (pela Proposição 1.3.2). Analogamente, $t \mathcal{L} xt$. Logo, como $s \mathcal{L} t$, temos $xs \mathcal{L} xt$ e portanto $xs \mathcal{H} xt$. Por conseguinte, $xs \, \pi \, xt$. Assim, provámos que π é compatível com a multiplicação à esquerda. De um modo análogo, provamos que π é compatível com a multiplicação à direita e, portanto, π é uma congruência de S. ∎

Seja D_k a $\mathcal{J}$-classe de $\mathcal{I}(X_n)$ dos elementos de característica k, i.e.

$$D_k = \{s \in \mathcal{I}(X_n) \mid |\operatorname{Im}(s)| = k\},$$

para qualquer $0 \leq k \leq n$.

Tomemos $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $D = D_k$. Seja H_0 a $\mathcal{H}$-classe em $\mathcal{I}(X_n)$ do idempotente e_k de $\mathcal{I}(X_n)$ de domínio (e imagem) $\{1, \ldots, k\}$. Seja $s \in D$ e suponhamos que $\operatorname{Dom}(s) = \{a_1 < \cdots < a_k\}$ e $\operatorname{Im}(s) = \{b_1 < \cdots < b_k\}$. Definimos duas transformações s_L e s_R de $D \cap \mathcal{POI}_n$ por:

(i) $\operatorname{Dom}(s_L) = \{1, \ldots, k\}$ e $\operatorname{Im}(s_L) = \operatorname{Dom}(s)$;

(ii) $\operatorname{Dom}(s_R) = \operatorname{Im}(s)$ e $\operatorname{Im}(s_R) = \{1, \ldots, k\}$,

i.e.,

$$s_L = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s_R = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_k \\ 1 & \cdots & k \end{pmatrix}.$$

Observemos que $s_L \mathcal{R}\, e_k \,\mathcal{L}\, s_R$, pelo que $s_L s_L^{-1} = e_k = s_R^{-1} s_R$, e $s_L \,\mathcal{L}\, s^{-1} \mathcal{R}\, s_R$, pelo que $s_L^{-1} s_L = ss^{-1}$ e $s_R s_R^{-1} = s^{-1}s$. Por outro lado, $s_L s s_R \in H_0$. Assim, faz sentido considerar a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rrcl} \varepsilon: & D & \to & H_0 \\ & s & \mapsto & s_L s s_R. \end{array}$$

Notemos que $s_L^{-1} s_L s s_R s_R^{-1} = s$, para qualquer $s \in D$. Por outro lado, dados $s, t \in D$ tais que $s\,\mathcal{H}\,t$, temos $s_L = t_L$ e $s_R = t_R$, por construção. Por conseguinte, se H é a $\mathcal{H}$-classe de um elemento s de D, então a restrição de ε a H,

$$\begin{array}{rrcl} \varepsilon_H: & H & \to & H_0 \\ & x & \mapsto & s_L x s_R, \end{array}$$

é uma bijecção com inversa

$$\begin{array}{rcl} H_0 & \to & H \\ g & \mapsto & s_L^{-1} g s_R^{-1}. \end{array}$$

Para qualquer $s \in \mathcal{I}(X_n)$, definimos $\overline{s} = s_L s s_R$.

Temos então a seguinte propriedade:

Lema 3.3.3. *Sejam $s, t \in \mathcal{I}(X_n)$ tais que $s\,\mathcal{J}\,st\,\mathcal{J}\,t$. Então $\overline{st} = \overline{s}\,\overline{t}$.*

Demonstração. Sejam $s, t \in \mathcal{I}(X_n)$ tais que $s\,\mathcal{J}\,st\,\mathcal{J}\,t$. Como $\mathcal{I}(X_n)$ é um monóide finito, então $s\,\mathcal{R}\,st\,\mathcal{L}\,t$ (veja-se a Proposição 1.3.6). Por outro lado, visto que s, t e st têm a mesma característica, então $\mathrm{Im}(s) = \mathrm{Dom}(t)$ e portanto $s_R^{-1} = t_L$, por construção. Seja $z = st$. Como $s\,\mathcal{R}\,z$ e $z\,\mathcal{L}\,t$, então $s_L = z_L$ e $z_R = t_R$, por construção. Logo

$$\overline{st} = z_L(st)z_R = s_L s t t_R = s_L s s_R s_R^{-1} t t_R = s_L s s_R t_L t t_R = \overline{s}\,\overline{t},$$

como queríamos demonstrar. ∎

É claro que, em particular, a propriedade estabelecida no lema anterior é válida para elementos de $\mathcal{POPI}_n$, i.e., dados $s, t \in \mathcal{POPI}_n$ tais que s, t e st pertencem à mesma $\mathcal{J}$-classe de $\mathcal{POPI}_n$, então $\overline{st} = \overline{s}\,\overline{t}$. Observemos ainda que $\overline{s} \in \mathcal{POPI}_n$, para qualquer $s \in \mathcal{POPI}_n$.

No que se segue, convém ter presente os seguintes factos bem conhecidos respeitantes a grupos cíclicos finitos. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e G um grupo cíclico de ordem m gerado por $a \in G$. Seja H um subgrupo de ordem p de G. Então, p é um divisor de m e, sendo $q = \frac{m}{p}$, o subgrupo H é gerado por a^q:

$$H = \{1, a^q, a^{2q}, \ldots, a^{(p-1)q}\}.$$

Por outro lado, dado um divisor p de m e $q = \frac{m}{p}$, o elemento a^q gera um subgrupo H de ordem p de G. Por conseguinte, existe uma correspondência bijectiva entre os subgrupos de G e os divisores (positivos) da sua ordem. Uma vez que G é um grupo abeliano, todos os seus subgrupos são normais, donde existe uma correspondência bijectiva entre as congruências de G e os divisores da sua ordem. Estas correspondências são, de facto, isomorfismos de reticulados. Recordemos ainda que, dado um grupo G, não necessariamente finito ou abeliano, e um seu subgrupo normal H, a (única) congruência ρ associada a H está definida por $x\,\rho\,y$ se e só se $x^{-1}y \in H$ (se e só se $yx^{-1} \in H$), para quaisquer $x, y \in G$. Para mais detalhes, veja-se [7] ou [27].

Seja $k \in \mathbb{N}$. Consideremos o ciclo

$$\sigma_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k \\ 2 & 3 & \cdots & k & 1 \end{pmatrix}$$

de $\{1, \ldots, k\}$ e denotemos por G_k o grupo gerado por σ_k. Então G_k é um grupo (cíclico) de ordem k. Observemos que G_k é exactamente a $\mathcal{H}$-classe de σ_k, considerado como elemento de $\mathcal{POPI}_n$, com $n \geq k$. Para qualquer divisor (positivo) p de k, denotemos por $\tilde{\pi}_{k,p}$ a congruência de G_k associada a p, i.e. a congruência de G_k associada ao subgrupo de ordem p de G_k.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Para $0 \leq k \leq n$, denotemos por J_k a $\mathcal{J}$-classe dos elementos de característica k de $\mathcal{POPI}_n$ e por I_k o ideal de $\mathcal{POPI}_n$ gerado por J_k, i.e.

$$I_k = \{s \in \mathcal{POPI}_n \mid 0 \leq |\operatorname{Im}(s)| \leq k\} = J_0 \cup J_1 \cup \cdots \cup J_k.$$

Notemos que, para $0 \leq k \leq n-1$, temos $I_k = B(J_{k+1})$.

Seja $k \in \{1, \ldots, n\}$. Observemos que $\overline{s} \in G_k$, para qualquer $s \in J_k$. Seja p um divisor de k. Definimos uma relação $\pi_{k,p}$ em $\mathcal{POPI}_n$ do seguinte modo: para qualquer $s, t \in \mathcal{POPI}_n$, $s\,\pi_{k,p}\,t$ se e só se

1. $s = t$; ou

2. $s, t \in I_{k-1}$; ou

3. $s, t \in J_k$, $s\,\mathcal{H}\,t$ e $\overline{s}\,\tilde{\pi}_{k,p}\overline{t}$.

Notemos que, como $\tilde{\pi}_{k,k}$ é a congruência universal de G_k, a relação $\pi_{k,k}$ é a congruência π_{J_k} de $\mathcal{POPI}_n$. Por outro lado, visto que $\tilde{\pi}_{k,1}$ é a congruência identidade de G_k e a restrição de ε a uma $\mathcal{H}$-classe é uma bijecção, então a relação $\pi_{k,1}$ é a congruência de Rees de $\mathcal{POPI}_n$ associada ao ideal I_{k-1}. Mais geralmente, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.3.4. *Sejam $k \in \{1,\dots,n\}$ e p um divisor de k. Então, a relação $\pi_{k,p}$ é uma congruência de $\mathcal{POPI}_n$.*

Demonstração. Tomemos $k \in \{1,\dots,n\}$ e p um divisor de k. Para facilitar a notação, tomemos $\rho = \pi_{k,p}$, $\tilde{\rho} = \tilde{\pi}_{k,p}$ e $\pi = \pi_{J_k}$. Não há dúvida que ρ é uma relação de equivalência. Com vista a demonstrar que ρ é compatível com a multiplicação, observemos que, dados $s,t \in \mathcal{POPI}_n$, temos $s\,\rho\,t$ se e só se $s\,\pi\,t$ e $s,t \in J_k$ implica $\overline{s}\;\tilde{\rho}\,\overline{t}$.

Sejam $s,t \in \mathcal{POPI}_n$ tais que $s\,\rho\,t$ e suponhamos que $s \neq t$. Seja $u \in \mathcal{POPI}_n$. Uma vez que π é uma congruência, temos $us\,\pi\,ut$ e $su\,\pi\,tu$. Em primeiro lugar, suponhamos que $us, ut \in J_k$. Então $s,t \notin I_{k-1}$ e, como $s\,\rho\,t$ e $s \neq t$, temos $s,t \in J_k$, $s\,\mathcal{H}\,t$ e $\overline{s}\;\tilde{\rho}\,\overline{t}$. Seja v a restrição de u a $(\mathrm{Dom}(s))u^{-1}$. Como $us\,\mathcal{J}\,s$, então $\mathrm{Dom}(s) \subseteq \mathrm{Im}(u)$, donde $|\,\mathrm{Dom}(v)| = |(\mathrm{Dom}(s))u^{-1}| = |\,\mathrm{Dom}(s)|$ e $vs = us$. Como $\mathrm{Dom}(t) = \mathrm{Dom}(s)$, de um modo análogo obtemos $vt = ut$. Além disso, como $s,t,v,vs,vt \in J_k$, pelo Lema 3.3.3, temos $\overline{vs} = \overline{v}\,\overline{s}$ e $\overline{vt} = \overline{v}\,\overline{t}$, donde

$$\overline{us} = \overline{vs} = \overline{v}\,\overline{s}\;\tilde{\rho}\,\overline{v}\,\overline{t} = \overline{vt} = \overline{ut}\,,$$

visto que $\overline{v} \in G_k$. Logo, $us\,\rho\,ut$. Suponhamos agora que $su, tu \in J_k$. Então, necessariamente, $s,t \in J_k$, $s\,\mathcal{H}\,t$ e $\overline{s}\;\tilde{\rho}\,\overline{t}$. Seja v a restrição de u a $\mathrm{Im}(s)$. Como $su\,\mathcal{J}\,s$, então $\mathrm{Im}(s) \subseteq \mathrm{Dom}(u)$, pelo que $v \in J_k$ e $sv = su$. Como $\mathrm{Im}(t) = \mathrm{Im}(s)$, de um modo análogo temos $tv = tu$. Tal como atrás, pelo Lema 3.3.3, temos $\overline{sv} = \overline{s}\,\overline{v}$ e $\overline{tv} = \overline{t}\,\overline{v}$, donde

$$\overline{su} = \overline{sv} = \overline{s}\,\overline{v}\;\tilde{\rho}\,\overline{t}\,\overline{v} = \overline{tv} = \overline{tu}\,,$$

visto que $\overline{v} \in G_k$. Logo, $su\,\rho\,tu$ e portanto ρ é uma congruência, como queríamos demonstrar. ∎

Sejam $k \in \{1,\dots,n\}$ e p um divisor de k. Sejam $s \in I_{k-1}$ e $t \in I_k$. Então $(s,t) \notin \pi_{k,p}$. Logo, a relação $\pi_{k,p}$ tem pelo menos duas classes e, portanto, não é a congruência universal de $\mathcal{POPI}_n$.

Recordemos que no capítulo anterior (Teorema 2.2.4) provámos que as congruências de $\mathcal{POI}_n$ são exactamente as $n+1$ congruências de Rees. Podemos agora demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.3.5. *As congruências do monóide $\mathcal{POPI}_n$ são exactamente as congruências $\pi_{k,p}$, com $k \in \{1,\dots,n\}$ e p um divisor de k, e a congruência universal.*

Demonstração. Atendendo à Proposição 3.3.4, basta mostrar que, se ρ é uma congruência não universal, então $\rho = \pi_{k,p}$, para algum $k \in \{1, \ldots, n\}$ e algum divisor p de k.

Seja ρ uma congruência não universal de $\mathcal{POPI}_n$. Seja $\overline{\rho}$ a congruência de $\mathcal{POI}_n$ induzida por ρ (i.e. $\overline{\rho} = \rho \cap \mathcal{POI}_n \times \mathcal{POI}_n$). Pelo Teorema 2.2.4, $\overline{\rho}$ é a congruência associada ao ideal

$$\overline{I}_{k-1} = \{s \in \mathcal{POI}_n \mid 0 \leq |\operatorname{Im}(s)| \leq k-1\}$$

de $\mathcal{POI}_n$, para algum $k \in \{1, \ldots, n+1\}$.

Consideramos agora vários passos.

Passo 1. Provemos que se $s \in \mathcal{POPI}_n$ é tal que $|\operatorname{Im}(s)| \leq k-1$ então $s\,\rho\,0$.

Denotemos por g o ciclo σ_n. Pela Proposição 3.2.1, existem $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ e $u \in \mathcal{POI}_n$ tais que $s = g^i u$. Como g é uma permutação, temos também $u = g^{n-i}s$ e portanto $s\,\mathcal{L}\,u$, donde $|\operatorname{Im}(s)| = |\operatorname{Im}(u)|$. Então $|\operatorname{Im}(u)| \leq k-1$ e portanto $u\,\overline{\rho}\,0$. Logo

$$s = g^i u\,\rho\,g^i 0 = 0.$$

Observemos que o Passo 1 nos permite concluir que, se $k = n+1$ então ρ é a congruência universal de $\mathcal{POPI}_n$. Logo, no que se segue podemos admitir que $k \leq n$.

Passo 2. Provemos que se $s, t \in \mathcal{POPI}_n$ são tais que $|\operatorname{Im}(s)| \geq k$ e $s\,\rho\,t$ então $s\,\mathcal{H}\,t$.

Nestas condições, pela Proposição 1.4.3, temos $s^{-1}\,\rho\,t^{-1}$, pelo que $ss^{-1}\,\rho\,tt^{-1}$ e $s^{-1}s\,\rho\,t^{-1}t$. Como $ss^{-1}, s^{-1}s, tt^{-1}, t^{-1}t \in \mathcal{POI}_n$, então $ss^{-1}\,\overline{\rho}\,tt^{-1}$ e $s^{-1}s\,\overline{\rho}\,t^{-1}t$. Por outro lado, uma vez que $|\operatorname{Im}(ss^{-1})| = |\operatorname{Im}(s^{-1}s)| = |\operatorname{Im}(s)| \geq k$, então $\{ss^{-1}\}$ e $\{s^{-1}s\}$ são as $\overline{\rho}$-classes de ss^{-1} e $s^{-1}s$, respectivamente, e portanto $ss^{-1} = tt^{-1}$ e $s^{-1}s = t^{-1}t$, donde $s\,\mathcal{H}\,t$.

Passo 3. Provemos que se $s, t \in \mathcal{POPI}_n$ são tais que $|\operatorname{Im}(s)| > k$ e $s\,\rho\,t$ então $s = t$.

Ora, pelo Passo 2, temos $s\,\mathcal{H}\,t$. Logo, $\operatorname{Dom}(s) = \operatorname{Dom}(t)$ e $\operatorname{Im}(s) = \operatorname{Im}(t)$. Admitamos que $s \neq t$. Sejam $\ell = |\operatorname{Im}(s)|$ e

$$\operatorname{Dom}(s) = \{i_1 < \cdots < i_k < \cdots < i_\ell\}.$$

Sejam $r_1, r_2 \in \{0, 1, \ldots, \ell-1\}$ os índices tais que

$$i_{r_1+1}s < \cdots < i_\ell s < i_1 s < \cdots < i_{r_1}s \quad \text{e} \quad i_{r_2+1}t < \cdots < i_\ell t < i_1 t < \cdots < i_{r_2}t.$$

Como $\mathrm{Im}(s) = \mathrm{Im}(t)$, se $r_1 = r_2$ então $s = t$. Consequentemente, $r_1 \neq r_2$. Suponhamos que $r_1 < r_2$. Definimos um idempotente e de $\mathcal{POPI}_n$ do modo seguinte:

$$\mathrm{Dom}(e) = \begin{cases} \{i_{r_1-k+1}s < \cdots < i_{r_1}s\}, & \text{se } k \leq r_1 \\ \{i_{r_1+1}s < \cdots < i_k s < i_1 s < \cdots < i_{r_1}s\}, & \text{se } r_1 < k < r_2 \\ \{i_{r_1+1}s < \cdots < i_{r_2-1}s < i_{r_2+1}s < \cdots & \\ \qquad\qquad \cdots < i_{k+1}s < i_1 s < \cdots < i_{r_1}s\}, & \text{se } k \geq r_2. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathrm{Dom}(se) = \begin{cases} \{i_{r_1-k+1} < \cdots < i_{r_1}\}, & \text{se } k \leq r_1 \\ \{i_1 < \cdots < i_k\}, & \text{se } r_1 < k < r_2 \\ \{i_1 < \cdots < i_{r_2-1} < i_{r_2+1} < \cdots < i_{k+1}\}, & \text{se } k \geq r_2. \end{cases}$$

Como $|\,\mathrm{Dom}(se)| = k$, uma vez que $se\,\rho\,te$, pelo PASSO 2, temos $se\,\mathcal{H}\,te$. Em particular, $\mathrm{Dom}(se) = \mathrm{Dom}(te)$. Por outro lado, como $i_{r_1}s = i_{r_2}t$ e $i_{r_1}s \in \mathrm{Dom}(e)$, então $i_{r_2} \in \mathrm{Dom}(te)$. No entanto, $i_{r_2} \notin \mathrm{Dom}(se)$, pelo que obtemos uma contradição. Analogamente, se $r_1 > r_2$, obtemos também uma contradição, pelo que $s = t$.

PASSO 4. Seja $\tilde{\rho}$ a congruência de G_k induzida por ρ. Seja p o divisor de k associado a $\tilde{\rho}$. Então $\tilde{\rho} = \tilde{\pi}_{k,p}$. Provemos que, se $s, t \in \mathcal{POPI}_n$ são tais que $|\,\mathrm{Im}(s)| = k$ então $s\,\rho\,t$ se e só se $s\,\pi_{k,p}\,t$.

Em primeiro lugar, suponhamos que $s\,\rho\,t$. Pelo PASSO 2, temos $s\,\mathcal{H}\,t$ e portanto $s_L = t_L$ e $s_R = t_R$. Logo, $\overline{s} = s_L s s_R\,\rho\,s_L t s_R = \overline{t}$ e portanto $\overline{s}\;\tilde{\rho}\,\overline{t}$. Por conseguinte, $s\,\pi_{k,p}\,t$. Reciprocamente, suponhamos que $s\,\pi_{k,p}\,t$. Então, por definição, $s\,\mathcal{H}\,t$ e $\overline{s}\;\tilde{\rho}\,\overline{t}$. Logo, $s_L = t_L$, $s_R = t_R$ e $\overline{s}\;\rho\,\overline{t}$, pelo que $s = s_L^{-1}\overline{s}\,s_R^{-1}\,\rho\,s_L^{-1}\overline{t}\,s_R^{-1} = t$.

Finalmente, a partir dos PASSOS 1, 3 e 4 podemos concluir que, para qualquer $s \in \mathcal{POPI}_n$, a ρ-classe de s e a $\pi_{k,p}$-classe de s coincidem, pelo que $\rho = \pi_{k,p}$, como queríamos demonstrar. ∎

Para enunciar o nosso próximo resultado, precisamos recordar o conceito de soma ordinal. Sejam $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ dois conjuntos parcialmente ordenados de suportes disjuntos. A *soma ordinal* de P_1 e P_2 (por esta ordem) é o conjunto parcialmente ordenado $P_1 \oplus P_2$ de suporte $P_1 \cup P_2$ e ordem parcial $\leq$ definida por: para quaisquer $x, y \in P_1 \cup P_2$, $x \leq y$ se e só se

1. $x \in P_1$ e $y \in P_2$; ou

2. $x, y \in P_1$ e $x \leq_1 y$; ou

3. $x, y \in P_2$ e $x \leq_2 y$.

Notemos que este operador sobre conjuntos parcialmente ordenados é associativo mas não é comutativo.

Seja $k \in \{1, \dots, n\}$ e consideremos dois divisores p_1 e p_2 de k. Então $\tilde{\pi}_{k,p_1} \subseteq \tilde{\pi}_{k,p_2}$ se e só se p_1 divide p_2, pelo que $\pi_{k,p_1} \subset \pi_{k,p_2}$ se e só se p_1 divide p_2 e $p_1 \neq p_2$. Por outro lado, dados $k_1, k_2 \in \{1, \dots, n\}$ tais que $k_1 < k_2$, temos $\pi_{k_1,p_1} \subset \pi_{k_2,p_2}$, para quaisquer divisores p_1 de k_1 e p_2 de k_2.

Denotemos por $\mathcal{D}_k$ o reticulado dos divisores do número natural k (com a ordem "ser divisor de"), para $k \geq 1$. Tendo em conta as observações que acabámos de fazer e o Teorema 3.3.5, obtemos o resultado seguinte, com o qual terminamos esta secção.

Teorema 3.3.6. *O reticulado das congruências do monóide $\mathcal{POPI}_n$ é isomorfo à soma ordinal de reticulados $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_n \oplus \mathcal{D}_1$.* ■

4. Uma apresentação para $\mathcal{POPI}_n$

Nesta secção o nosso objectivo principal é estabelecer uma apresentação para os monóides $\mathcal{POPI}_n$ (com $n \geq 2$). À semelhança do que fizemos no capítulo anterior para determinar uma apresentação para os monóides $\mathcal{POI}_n$ (com $n \geq 2$), a estratégia que seguimos consiste em encontrar um par (X, R) que satisfaça as condições da Proposição 1.7.2. Além disso, a apresentação que exibimos para os monóides $\mathcal{POPI}_n$ baseia-se de forma determinante naquela que estabelecemos para os monóides $\mathcal{POI}_n$. De facto, esta apresentação para $\mathcal{POPI}_n$ resulta da nossa apresentação para $\mathcal{POI}_n$ juntando um novo símbolo e algumas relações envolvendo este símbolo (e os anteriores). Obtemos deste modo uma apresentação para $\mathcal{POPI}_n$ com $n+1$ geradores e $\frac{1}{2}(n^2 + 7n - 2)$ relações. A partir desta apresentação para os monóides $\mathcal{POPI}_n$, usando transformações de Tietze, deduzimos outra apresentação para $\mathcal{POPI}_n$ com 2 geradores e o mesmo número de relações.

Antes de apresentarmos o nosso candidato a conjunto de relações, observemos que a estratégia que seguimos (referida no parágrafo anterior) pode ser substituída por outra recorrendo ao conceito de *produto livre* de semigrupos (vejam-se [42] e [9]). Não nos parecendo que o ganho daí resultante (fundamentalmente, ao nível do *tamanho* e "elegância"da prova) superasse os custos da introdução de um novo conceito, optámos pelo método directo.

Seja $n \geq 2$ e tomemos $n+1$ letras $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$. Consideremos o conjunto $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ e os seguintes conjuntos de relações:

(R_1) $x_i x_0 = x_0 x_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-2$;

(R_2) $x_jx_i = x_ix_j$, $2 \leq i+1 < j \leq n-1$;

(R_3) $x_0^2x_1 = x_0^2 = x_{n-1}x_0^2$;

(R_4) $x_{i+1}x_ix_{i+1} = x_{i+1}x_i = x_ix_{i+1}x_i$, $1 \leq i \leq n-2$;

(R_5) $x_ix_{i+1}\cdots x_{n-1}x_0x_1\cdots x_{i-1}x_i = x_i$, $0 \leq i \leq n-1$;

(R_6) $x_{i+1}\cdots x_{n-1}x_0x_1\cdots x_{i-1}x_i^2 = x_i^2$, $1 \leq i \leq n-1$;

(R_7) $x_nx_i = x_{i+1}x_n$, $1 \leq i \leq n-2$;

(R_8) $x_nx_0x_1 = x_1$ e $x_{n-1}x_0x_n = x_{n-1}$;

(R_9) $x_n^n = 1$.

Tal como no capítulo anterior, denotamos a relação $x_0^2x_1 = x_0^2$ por $\mathrm{R}_{3\mathrm{a}}$, a relação $x_{n-1}x_0^2 = x_0^2$ por $\mathrm{R}_{3\mathrm{b}}$, as relações $x_{i+1}x_ix_{i+1} = x_{i+1}x_i$, $1 \leq i \leq n-2$, por $\mathrm{R}_{4\mathrm{a}}$ e as relações $x_ix_{i+1}x_i = x_{i+1}x_i$, $1 \leq i \leq n-2$, por $\mathrm{R}_{4\mathrm{b}}$. Também denotamos a relação $x_nx_0x_1 = x_1$ por $\mathrm{R}_{8\mathrm{a}}$ e a relação $x_{n-1}x_0x_n = x_{n-1}$ por $\mathrm{R}_{8\mathrm{b}}$. Seja

$$\overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R}_1 \cup \mathrm{R}_2 \cup \mathrm{R}_3 \cup \mathrm{R}_4 \cup \mathrm{R}_5 \cup \mathrm{R}_6 \cup \mathrm{R}_7 \cup \mathrm{R}_8 \cup \mathrm{R}_9.$$

Então $\overline{\mathrm{R}}$ possui $\frac{1}{2}(n^2+7n-2)$ relações.

Exemplo 3.4.1. Para $n=3$, temos $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ e o conjunto $\overline{\mathrm{R}}$ é constituído pelas seguintes 14 relações: $x_1x_0 = x_0x_2$, $x_0^2x_1 = x_0^2 = x_2x_0^2$, $x_1x_2x_1 = x_2x_1 = x_2x_1x_2$, $x_0x_1x_2x_0 = x_0$, $x_1x_2x_0x_1 = x_1$, $x_2x_0x_1x_2 = x_2$, $x_2x_0x_1^2 = x_1^2$, $x_0x_1x_2^2 = x_2^2$, $x_3x_1 = x_2x_3$, $x_3x_0x_1 = x_1$, $x_2x_0x_3 = x_2$ e $x_3^3 = 1$ (notemos que R_2 é, neste caso, vazio). Usando em conjunto os pacotes [36] e [30] para o GAP, determinamos que o monóide definido pela apresentação $\langle X \mid \overline{\mathrm{R}} \rangle$ possui 31 elementos. Como $\mathcal{POPI}_3$ também tem 31 elementos e as transformações

$$g_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

formam um conjunto de geradores para $\mathcal{POPI}_3$ que satisfazem todas as relações de $\overline{\mathrm{R}}$, então o monóide $\mathcal{POPI}_3$ é definido pela apresentação $\langle X \mid \overline{\mathrm{R}} \rangle$.

Usando os mesmos pacotes para o GAP, também estabelecemos que o monóide definido por $\langle X \mid \overline{\mathrm{R}} \rangle$ tem 141, 631 e 2773 elementos, respectivamente quando $n=4$, $n=5$ e $n=6$, sendo este o número de elementos de $\mathcal{POPI}_4$, $\mathcal{POPI}_5$ e $\mathcal{POPI}_6$, respectivamente. De um modo análogo ao caso $n=3$, também nos casos $n=4$,

$n = 5$ e $n = 6$ encontramos geradores de $\mathcal{POPI}_n$ satisfazendo todas as relações de $\overline{\mathrm{R}}$ e, portanto, concluímos que $\mathcal{POPI}_n$ é definido pela apresentação $\langle X \mid \overline{\mathrm{R}} \rangle$, para $n \in \{4, 5, 6\}$.

Seja $A = \{g_0, g_1, \dots, g_{n-1}, g_n\}$ o conjunto de geradores de $\mathcal{POPI}_n$ definido na secção 2 (Corolário 3.2.3). No capítulo anterior (Proposição 2.4.14) mostrámos que o conjunto $\{g_0, g_1, \dots, g_{n-1}\}$ satisfaz todas as relações de $\mathrm{R}_1 \cup \mathrm{R}_2 \cup \mathrm{R}_3 \cup \mathrm{R}_4 \cup \mathrm{R}_5 \cup \mathrm{R}_6$. Tomemos agora $i \in \{1, \dots, n-2\}$. Então $2 \le n - i \le n - 1$ e $3 \le n - i + 1 \le n$. Como

$$g_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_i = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & \cdots & n-i-1 & n-i & n-i+2 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & n-i-1 & n-i+1 & n-i+2 & \cdots & n \end{array}\right)$$

e

$$g_{i+1} = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & \cdots & n-i-2 & n-i-1 & n-i+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & n-i-2 & n-i & n-i+1 & \cdots & n \end{array}\right),$$

então

$$g_n g_i = \left(\begin{array}{ccc|c|cccc} 1 & \cdots & n-i-2 & n-i-1 & n-i+1 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & \cdots & n-i-1 & n-i+1 & n-i+2 & \cdots & n & 1 \end{array}\right) = g_{i+1} g_n.$$

Logo, A satisfaz todas as relações de R_7. Seguidamente, como

$$g_0 = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix},$$

então

$$g_n g_0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g_0 g_n = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & n \\ 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, uma vez que $\mathrm{Dom}(g_1) = \{1, \dots, n-1\}$ e $\mathrm{Im}(g_{n-1}) = \{2, \dots, n\}$, é claro que $g_n g_0 g_1 = g_1$ e $g_{n-1} g_0 g_n = g_{n-1}$. Logo, A satisfaz ambas as relações de R_8. Finalmente, visto que g_n é uma permutação de ordem n, então a relação R_9 é satisfeita por g_n. Por conseguinte, acabámos de provar o seguinte resultado:

Proposição 3.4.1. *O conjunto de geradores A do monóide $\mathcal{POPI}_n$ satisfaz todas as relações de $\overline{\mathrm{R}}$.* ∎

Voltamos a recordar que o nosso objectivo é estabelecer uma apresentação para os monóides $\mathcal{POPI}_n$, usando o método dado pela Proposição 1.7.2. Tendo já definido um conjunto de relações, passamos a definir o nosso candidato a conjunto de palavras reduzidas $\overline{W}$ para $\mathcal{POPI}_n$. Tal como para os monóides $\mathcal{POI}_n$, o conjunto de palavras reduzidas para $\mathcal{POPI}_n$ que consideramos tem por base a estrutura das $\mathcal{J}$-classes de $\mathcal{POPI}_n$ e, de forma determinante, também o conjunto W de palavras reduzidas para $\mathcal{POI}_n$ que considerámos no capítulo anterior.

Sejam $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\ell = n-k$ $(1 \leq \ell \leq n-1)$ e $w_1, \ldots, w_\ell$ as palavras k-principais, i.e.

$$w_j \equiv x_{\ell-j+1} \cdots x_{\ell-j+k} \equiv x_{n-j+1-k} \cdots x_{n-j}, \quad 1 \leq j \leq \ell.$$

Seja $\overline{W}_k$ o conjunto de todas as palavras da forma

$$x_n^i \Big(\textstyle\prod_{j=1}^{\ell} u_j\Big) x_0^\ell \Big(\textstyle\prod_{j=1}^{\ell} v_j\Big),$$

em que $0 \leq i \leq n-1$, u_j é um sufixo de w_j e v_j é um prefixo de w_j, para qualquer $1 \leq j \leq \ell$,

$$\mathbf{1} \leq |u_1| \leq \cdots \leq |u_\ell| \leq k \quad \text{e} \quad k \geq |v_1| \geq \cdots \geq |v_\ell| \geq 0.$$

Definimos também $\overline{W}_n = \{x_n^i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ e $\overline{W}_0 = \{x_0^n\}$. Seja

$$\overline{W} = \overline{W}_0 \cup \overline{W}_1 \cup \cdots \cup \overline{W}_n.$$

Observemos que, dado $1 \leq k \leq n-1$, não admitimos em $\overline{W}_k$ uma palavra

$$w \equiv x_n^i \Big(\textstyle\prod_{j=1}^{\ell} u_j\Big) x_0^\ell \Big(\textstyle\prod_{j=1}^{\ell} v_j\Big),$$

com u_j o sufixo vazio de w_j, para algum $1 \leq j \leq \ell$. Observemos também que, para $2 \leq j \leq \ell$, a palavra k-principal w_j não contém a letra x_{n-1} e um sufixo de w_1 é não vazio se e só se contém a letra x_{n-1}.

A nossa primeira propriedade do conjunto $\overline{W}$ é a seguinte:

Proposição 3.4.2. $|\overline{W}| = |\mathcal{POPI}_n|$.

Demonstração. Sejam $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\ell = n-k$ e $w_1, \ldots, w_\ell$ as ℓ palavras k-principais. Designemos uma palavra da forma $\prod_{j=1}^{\ell} u_j$, com u_j um sufixo de w_j, para qualquer $1 \leq j \leq \ell$, e $0 \leq |u_1| \leq \cdots \leq |u_\ell| \leq k$, por *factor k-especial*. Seja m o número de factores k-especiais contendo a letra x_{n-1} e seja m' o número de factores k-especiais que não contêm a letra x_{n-1}. Então $m + m' = \binom{n}{k}$ (veja-se a página 66) e, como o número de palavras da forma $\prod_{j=1}^{\ell} v_j$, com v_j um prefixo de w_j, para qualquer $1 \leq j \leq \ell$, e $k \geq |v_1| \geq \cdots \geq |v_\ell| \geq 0$, é igual a $\binom{n}{k}$ (veja-se a página 66), temos

$|\overline{W}_k| = nm\binom{n}{k}$. Por outro lado, m' é o número de palavras da forma $\prod_{j=2}^{\ell} u_j$, com u_j um sufixo de w_j, para qualquer $2 \leq j \leq \ell$, e $0 \leq |u_2| \leq \cdots \leq |u_\ell| \leq k$, i.e. m' é o número de *combinações com repetição* de $k+1$ objectos tomando $\ell - 1$ de cada vez:

$$m' = \binom{(k+1)+(l-1)-1}{(k+1)-1} = \binom{n-1}{k}$$

(veja-se [20]). Então,

$$nm = n\binom{n}{k} - nm' = n\binom{n}{k} - n\binom{n-1}{k} = k\binom{n}{k}$$

e portanto $|\overline{W}_k| = k\binom{n}{k}^2$. Visto que $|\overline{W}_n| = n$ e $|\overline{W}_0| = 1$, então

$$|\overline{W}| = 1 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = |\mathcal{POPI}_n|,$$

tendo em conta o Corolário 3.1.8. ■

Os próximos lemas estabelecem relações auxiliares de que necessitamos para provar que $\overline{W}$ constitui um conjunto de palavras reduzidas para $\mathcal{POPI}_n$.

Lema 3.4.3. *As relações $x_1x_n = x_n^2x_{n-1}x_0$ e $x_1x_n^i = x_n^ix_{n-i+1}$, com $2 \leq i \leq n-1$, são uma consequência de* R_7, $\mathrm{R}_{8\mathrm{b}}$ *e de* R_9.

Demonstração. Comecemos por observar que multiplicando à direita a relação $\mathrm{R}_{8\mathrm{b}}$ por x_n^{n-1} e aplicando em seguida R_9, obtemos a relação $x_{n-1}x_0 = x_{n-1}x_n^{n-1}$. Por outro lado, aplicando $n-2$ vezes as relações R_7, concluímos que $x_{n-1}x_n^{n-1} = x_n^{n-2}x_1x_n$. Então, $x_{n-1}x_0 = x_n^{n-2}x_1x_n$ e portanto, por R_9, temos $x_n^2x_{n-1}x_0 = x_1x_n$.

Provamos agora que $x_1x_n^i = x_n^ix_{n-i+1}$, para qualquer $2 \leq i \leq n-1$, por indução em i. Para $i=2$, usando a relação estabelecida atrás e $\mathrm{R}_{8\mathrm{b}}$, temos

$$x_1x_n^2 \equiv x_1x_nx_n = x_n^2x_{n-1}x_0x_n = x_n^2x_{n-1}.$$

Suponhamos que a relação é válida para $2 \leq i \leq n-2$. Como $2 \leq n-i \leq n-2$, por R_7, temos

$$x_1x_n^{i+1} \equiv x_1x_n^ix_n = x_n^ix_{n-i+1}x_n = x_n^{i+1}x_{n-i} \equiv x_n^{i+1}x_{n-(i+1)+1}$$

O resultado fica pois demonstrado. ■

Lema 3.4.4. *A relação* $x_n x_{n-1} = x_0 x_1 x_n^2$ *é uma consequência de* R_7*,* $\mathrm{R}_{8\mathrm{a}}$ *e de* R_9*.*

Demonstração. Multiplicando a relação $\mathrm{R}_{8\mathrm{a}}$ à esquerda por x_n^{n-2} e aplicando as relações R_7 ($n-2$ vezes), temos

$$x_n^{n-1} x_0 x_1 = x_n^{n-2} x_1 = x_{n-1} x_n^{n-2}.$$

Então, $x_0 x_1 = x_n x_{n-1} x_n^{n-2}$ (por R_9) e portanto $x_0 x_1 x_n^2 = x_n x_{n-1}$ (também por R_9). ■

Denotemos (tal como no capítulo anterior) a relação $x_0 x_1 \cdots x_{n-1} x_0 = x_0$ por R_5^0.

Lema 3.4.5. *Para qualquer* $1 \leq i \leq n-1$*, a relação*

$$x_0 x_n^i = x_n^{i-1}(x_{n-i+1} \cdots x_{n-1}) x_0 x_1 \cdots x_{n-i}$$

é uma consequência de R_5^0*,* R_7*,* R_8 *e de* R_9*.*

Demonstração. Por R_5^0 e $\mathrm{R}_{8\mathrm{b}}$, temos $x_0 x_n = x_0 x_1 \cdots x_{n-1} x_0 x_n = x_0 x_1 \cdots x_{n-1}$, pelo que a igualdade se verifica para $i = 1$. Para $2 \leq i \leq n-1$, provamos a igualdade por indução em i. A partir da relação $x_0 x_n = x_0 x_1 \cdots x_{n-1}$, aplicando R_9, obtemos a relação $x_0 = x_0 x_1 \cdots x_{n-1} x_n^{n-1}$. Então

$$\begin{aligned} x_n x_0 &= x_n x_0 x_1 \cdots x_{n-1} x_n^{n-1} \\ &= x_1 (x_2 \cdots x_{n-1}) x_n x_n^{n-2} && (\text{por } \mathrm{R}_{8\mathrm{a}}) \\ &= x_1 x_n (x_1 \cdots x_{n-2}) x_n^{n-2} && (\text{por } \mathrm{R}_7) \\ &= x_n^2 x_{n-1} x_0 x_1 \cdots x_{n-2} x_n^{n-2}. && (\text{pelo Lema 3.4.3}) \end{aligned}$$

Logo, por R_9, $x_0 = x_n x_{n-1} x_0 x_1 \cdots x_{n-2} x_n^{n-2}$, donde $x_0 x_n^2 = x_n x_{n-1} x_0 x_1 \cdots x_{n-2}$, pelo que a igualdade se verifica para $i = 2$. Suponhamos que a igualdade é válida para $2 \leq i \leq n-2$. Então, por hipótese, $x_0 x_n^i = x_n^{i-1}(x_{n-i+1} \cdots x_{n-1}) x_0 x_1 \cdots x_{n-i}$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned} x_0 &= x_n^{i-1}(x_{n-i+1} \cdots x_{n-1}) x_0 x_1 (x_2 \cdots x_{n-i}) x_n x_n^{n-i-1} && (\text{por } \mathrm{R}_9) \\ &= x_n^{i-1} x_{n-i+1} \cdots x_{n-1} x_0 x_1 x_n (x_1 \cdots x_{n-i-1}) x_n^{n-i-1} && (\text{por } \mathrm{R}_7) \\ &= x_n^{i-1} x_{n-i+1} \cdots x_{n-2} x_{n-1} x_0 x_n^2 x_{n-1} x_0 x_1 \cdots x_{n-i-1} x_n^{n-i-1} && (\text{pelo Lema 3.4.3}) \\ &= x_n^{i-1} x_{n-i+1} \cdots x_{n-1} x_n x_{n-1} x_0 x_1 \cdots x_{n-i-1} x_n^{n-i-1} && (\text{por } \mathrm{R}_{8\mathrm{b}}) \\ &= x_n^i x_{n-i} \cdots x_{n-2} x_{n-1} x_0 x_1 \cdots x_{n-i-1} x_n^{n-i-1} && (\text{por } \mathrm{R}_7) \end{aligned}$$

e portanto, por R_9, $x_0 x_n^{i+1} = x_n^i (x_{n-(i+1)+1} \cdots x_{n-1}) x_0 x_1 \cdots x_{n-(i+1)}$. ■

Verifica-se também que:

Lema 3.4.6. *A relação* $x_n x_0 = x_1 \cdots x_{n-1} x_0$ *é uma consequência de* R_5^0 *e de* $\mathrm{R}_{8\mathrm{a}}$*.* ■

Seja $Y = \{x_0, \dots , x_{n-1}\}$. Provámos no capítulo anterior (Proposição 2.4.4) que x_0^n representa um zero do monóide definido pela apresentação $\langle Y \mid \mathrm{R}_1 \cup \mathrm{R}_3 \cup \mathrm{R}_5^0\rangle$. Tendo em conta este resultado, temos que x_0^n também representa um zero à direita do monóide definido pela apresentação $\langle X \mid \mathrm{R}_1 \cup \mathrm{R}_3 \cup \mathrm{R}_5^0 \cup \mathrm{R}_{8a}\rangle$. De facto, pelo Lema 3.4.6, temos $x_n x_0^n = x_1 \cdots x_{n-1} x_0^n$ e portanto $x_n x_0^n = x_0^n$. Assim:

Lema 3.4.7. *A relação $x_n x_0^n = x_0^n$ é uma consequência de* R_1, R_3, R_5^0 *e de* R_{8a}. ∎

Lema 3.4.8. *Para quaisquer $2 \leq j \leq n-1$ e $1 \leq i \leq n-1$, a relação*

$$x_j x_n^i = \begin{cases} x_n^i x_{j-i}, & se\ j \geq i+1 \\ x_n^{j-1} x_1 x_n^{i-j+1}, & se\ j < i+1 \end{cases}$$

é uma consequência de R_7.

Demonstração. Tomemos $j \in \{2, \dots , n-1\}$. Provamos o lema por indução em i. Para $i = 1$, como $j \geq 2 = i+1$ e $1 \leq j-1 \leq n-2$, temos precisamente uma relação de R_7. Logo, a igualdade verifica-se para $i = 1$. Suponhamos que a igualdade é válida para $1 \leq i \leq n-2$. Consideramos três casos. Primeiro admitamos que $j < i+1$. Então, $x_j x_n^i = x_n^{j-1} x_1 x_n^{i-j+1}$, donde $x_j x_n^{i+1} = x_n^{j-1} x_1 x_n^{(i+1)-j+1}$. Seguidamente, admitamos que $j = i+1$. Então $x_j x_n^i = x_n^i x_{j-i}$, pelo que $x_j x_n^{i+1} = x_n^i x_{j-i} x_n = x_n^i x_{j-i} x_n^{(i+1)+1-j}$. Finalmente, admitamos que $j > i+1$. Então $x_j x_n^i = x_n^i x_{j-i}$ e portanto, por R_7,

$$x_j x_n^{i+1} = x_n^i x_{j-i} x_n = x_n^{i+1} x_{j-i-1} = x_n^{i+1} x_{j-(i+1)}$$

(notemos que $j > i+1$ e $j \leq n-1$ implicam $1 \leq j-i-1 \leq n-2$). A igualdade é válida para $i+1$ e portanto o resultado fica demonstrado. ∎

Proposição 3.4.9. *Sejam $i \in \{1, \dots , n-1\}$ e $j \in \{0, 1, \dots , n-1\}$. Então, existem $k \in \{0, 1, \dots , n-1\}$ e $v \in Y^*$ tais que a relação $x_j x_n^i = x_n^k v$ é uma consequência de* R_5^0, R_7, R_8 *e de* R_9.

Demonstração. Para $j = 0$ e $j = 1$ o resultado é consequência dos Lemas 3.4.5 e 3.4.3, respectivamente. Suponhamos que $2 \leq j \leq n-1$. Se $j \geq i+1$, então o resultado sai do Lema 3.4.8. Suponhamos então que $j < i+1$. Em primeiro lugar, admitamos que $i = j$. Então, pelos Lemas 3.4.8 e 3.4.3, temos

$$x_j x_n^i = x_n^{j-1} x_1 x_n = x_n^{j-1} x_n^2 x_{n-1} x_0 = x_n^{j+1} x_{n-1} x_0.$$

Se $j < n-1$, então o resultado fica demonstrado. Se $j = n-1$, então $x_j x_n^i = x_{n-1}x_0$, por R_9, e o resultado fica uma vez mais demonstrado. Falta somente considerar o caso $i > j$. Pelos Lemas 3.4.8 e 3.4.3, temos

$$x_j x_n^i = x_n^{j-1} x_1 x_n^{i-j+1} = x_n^{j-1} x_n^{i-j+1} x_{n-(i-j+1)+1} = x_n^i x_{n-i+j}$$

(notemos que $i-j+1 \geq 2$ e $n-i-j \leq n-1$). A prova do resultado fica assim concluída. ∎

É uma questão de rotina, por indução no comprimento de uma palavra de Y^*, provar o seguinte corolário da Proposição 3.4.9:

Corolário 3.4.10. *Sejam* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *e* $u \in Y^*$. *Então, existem* $v \in Y^*$ *e* $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ *tais que a relação* $ux_n^i = x_n^k v$ *é uma consequência de* R_5^0, R_7, R_8 *e de* R_9. ∎

Temos ainda:

Corolário 3.4.11. *Seja* $w \in X^*$. *Então, existem* $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ *e* $v \in Y^*$ *tais que a relação* $w = x_n^k v$ *é uma consequência de* R_5^0, R_7, R_8 *e* R_9.

Demonstração. Se w é a palavra vazia ou uma letra, o resultado é trivial. Por hipótese de indução, suponhamos que o resultado é válido para todas as palavras de X^* de comprimento t (para certo $t \geq 1$). Seja $w = x_{i_1} \cdots x_{i_{t+1}}$ uma palavra de X^* de comprimento $t+1$. Então, por hipótese, $x_{i_1} \cdots x_{i_t} = x_n^{k_1} v_1$, para alguns $0 \leq k_1 \leq n-1$ e $v_1 \in Y^*$. Se $0 \leq i_{t+1} \leq n-1$, então $w = x_n^{k_1} v_1 x_{i_{t+1}}$, com $v_1 x_{i_{t+1}} \in Y^*$, e o resultado fica demonstrado. Por outro lado, se $i_{t+1} = n$, pelo Corolário 3.4.10, temos $v_1 x_{i_{t+1}} = x_n^{k_2} v$, para alguns $0 \leq k_2 \leq n-1$ e $v \in Y^*$. Logo, $w = x_n^{k_1+k_2} v$. Tomemos $k = k_1 + k_2$ se $k_1 + k_2 \leq n-1$, caso contrário tomemos $k = k_1 + k_2 - n$. Então, aplicando R_9 se necessário, obtemos $w = x_n^k v$, com $0 \leq k \leq n-1$ e $v \in Y^*$, como queríamos demonstrar. ∎

Lema 3.4.12. *Sejam* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\ell = n-k$ *e* $w_1, \ldots, w_\ell$ *as palavras* k*-principais. Então, para qualquer* $2 \leq j \leq \ell$, *a relação* $x_n w_j = w_{j-1} x_n$ *é uma consequência de* R_7.

Demonstração. Recordemos que $w_j = x_{\ell-j+1} \cdots x_{n-j}$, para qualquer $1 \leq j \leq \ell$. Uma vez que $2 \leq j \leq \ell$, então $1 \leq \ell - j + 1 \leq n - j \leq n-2$, pelo que, por R_7, temos $x_n w_j = x_n x_{\ell-j+1} \cdots x_{n-j} = x_{(\ell-j+1)+1} \cdots x_{(n-j)+1} x_n = x_{\ell-(j-1)+1} \cdots x_{n-(j-1)} x_n = w_{j-1} x_n$, como queríamos demonstrar. ∎

Antes de apresentarmos o próximo lema, observemos que, a partir das relações R_1 e $\mathrm{R}_{3\mathrm{b}}$, podemos deduzir a relação

$$x_i \cdots x_{n-1} x_0^{n-i+1} = x_0^{n-i+1}, \tag{7}$$

para qualquer $1 \leq i \leq n-1$ (veja-se a Proposição 2.4.3).

Lema 3.4.13. *Sejam* $k \in \{1, \ldots, n-2\}$, $\ell = n-k$, $w_1, \ldots, w_\ell$ *as palavras* k*-principais e* $t \in \{1, \ldots, \ell-1\}$. *Então, a relação*

$$x_n^t x_0^\ell = (w_{\ell-t+1} \cdots w_\ell) x_0^\ell$$

é uma consequência de R_1, $\mathrm{R}_{3\mathrm{b}}$, R_5^0, R_7 *e de* $\mathrm{R}_{8\mathrm{a}}$.

Demonstração. Tomemos $k \in \{1, \ldots, n-2\}$ e $\ell = n-k$. Notemos que $2 \leq \ell \leq n-1$. Provamos o lema por indução em t. Para $t = 1$, temos

$$\begin{aligned}
x_n x_0^\ell &= x_n x_0 x_0^{\ell-1} \\
&= x_1 \cdots x_{n-1} x_0 x_0^{\ell-1} && \text{(pelo Lema 3.4.6)} \\
&= x_1 \cdots x_k x_{k+1} \cdots x_{n-1} x_0^{n-(k+1)+1} \\
&= x_1 \cdots x_k x_0^{n-(k+1)+1} && \text{(por (7))} \\
&= w_\ell x^\ell.
\end{aligned}$$

Suponhamos agora que a igualdade é válida para certo $1 \leq t \leq \ell-2$. Então,

$$\begin{aligned}
x_n^{t+1} x_0^\ell &= x_n x_n^t x_0^\ell \\
&= x_n w_{\ell-t+1} \cdots w_\ell x_0^\ell && \text{(por hipótese)} \\
&= w_{(\ell-t+1)-1} \cdots w_{\ell-1} x_n x_0^\ell && \text{(pelo Lema 3.4.12)} \\
&= w_{\ell-(t+1)+1} \cdots w_{\ell-1} w_\ell x_0^\ell && \text{(pelo caso } t=1\text{)}
\end{aligned}$$

e portanto a igualdade é válida para $t+1$. ■

Lema 3.4.14. *Sejam* $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ *e* $t \in \{1, \ldots, n-i-1\}$. *Então, a relação* $x_n^t x_i = x_{i+t} x_n^t$ *é uma consequência de* R_7.

Demonstração. Tomemos $i \in \{1, \ldots, n-2\}$. Para $t = 1$, a relação $x_n^t x_i = x_{i+t} x_n^t$ pertence a R_7. Supondo que a igualdade é válida para certo $t \in \{1, \ldots, n-i-2\}$, por R_7, temos $x_n^{t+1} x_i \equiv x_n x_n^t x_i = x_n x_{i+t} x_n^t = x_{i+t+1} x_n^{t+1}$, o que prova o lema. ■

Lema 3.4.15. *Sejam $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\ell = n-k$ e $w_1, \dots, w_\ell$ as palavras k-principais. Sejam $u_2, \dots, u_\ell$ sufixos de $w_2, \dots, w_\ell$, respectivamente, tais que $0 \leq |u_2| \leq \cdots \leq |u_\ell|$. Então, existem $t \in \{k, \dots, n-1\}$ e sufixos $u'_1, \dots, u'_\ell$ de $w_1, \dots, w_\ell$, respectivamente, com $0 < |u'_1| \leq |u'_2| \leq \cdots \leq |u'_\ell|$, tais que a relação*

$$\left(\prod_{j=2}^{\ell} u_j\right) x_0^\ell = x_n^t \left(\prod_{j=1}^{\ell} u'_j\right) x_0^\ell$$

é uma consequência de R_1, $\mathrm{R}_{3\mathrm{b}}$, R_5^0, R_7, $\mathrm{R}_{8\mathrm{a}}$ *e de* R_9.

Demonstração. Consideremos, em primeiro lugar, $k = n-1$. Então, $\ell = 1$ e a única palavra $(n-1)$-principal é $w_1 = x_1 \cdots x_{n-1}$. Pelo Lema 3.4.6, temos $x_n x_0 = w_1 x_0$, donde $x_0 = x_n^{n-1} w_1 x_0$, por R_9. Portanto, neste caso, o lema está provado.

Suponhamos que $1 \leq k \leq n-2$. Sejam $z = (\prod_{j=2}^{\ell} u_j) x_0^\ell$ e $u_j = x_{n-j+1-s_j} \cdots x_{n-j}$, com $2 \leq j \leq \ell$, para certos $s_2, \dots, s_\ell \in \{0, 1, \dots, k\}$. Como $s_j = |u_j|$, para qualquer $2 \leq j \leq \ell$, então $0 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_\ell \leq k$. Dado $2 \leq j \leq \ell$, por R_7, temos

$$x_n u_j = x_n x_{n-j+1-s_j} \cdots x_{n-j} = x_{n-(j-1)+1-s_j} \cdots x_{n-(j-1)} x_n,$$

visto que x_0 e x_{n-1} não são letras de u_j. Consequentemente,

$$\begin{aligned} z &= x_n^{n-1} x_n \left(\prod_{j=2}^{\ell} u_j\right) x_0^\ell && \text{(por } \mathrm{R}_9\text{)} \\ &= x_n^{n-1} \left(\prod_{j=2}^{\ell} (x_{n-(j-1)+1-s_j} \cdots x_{n-(j-1)})\right) x_n x_0^\ell \\ &= x_n^{n-1} \left(\prod_{j=2}^{\ell} (x_{n-(j-1)+1-s_j} \cdots x_{n-(j-1)})\right) w_\ell x_0^\ell && \text{(pelo Lema 3.4.13)} \\ &= x_n^{n-1} \left(\prod_{j=1}^{\ell} \overline{u}_j\right) x_0^\ell, \end{aligned}$$

em que $s_{\ell+1} = k$ e $\overline{u}_j = x_{n-j+1-s_{j+1}} \cdots x_{n-j}$, para qualquer $1 \leq j \leq \ell$. É claro que $\overline{u}_j$ é um sufixo de w_j de comprimento s_{j+1}, para qualquer $1 \leq j \leq \ell$, e

$$0 \leq |\overline{u}_1| \leq |\overline{u}_2| \leq \cdots \leq |\overline{u}_\ell| = k.$$

Se $s_2 \neq 0$ então o lema está provado. Por conseguinte, suponhamos que $s_2 = 0$ e tomemos $i \in \{2, \dots, \ell\}$ tal que

$$0 = s_2 = \cdots = s_i < s_{i+1} \leq \cdots \leq s_{\ell+1} = k.$$

Seja $j \in \{i, \dots, \ell\}$. Se $n-j+1-s_{j+1} \leq r \leq n-j$ então $i-1 \leq n-r-1 \leq j-s_{j+1}-2$, donde $x_n^{i-1} x_r = x_{r+(i-1)} x_n^{i-1}$, pelo Lema 3.4.14. Logo, para qualquer $i \leq j \leq \ell$, temos

$$\begin{aligned} x_n^{i-1} \overline{u}_j &= x_n^{i-1} x_{n-j+1-s_{j+1}} \cdots x_{n-j} \\ &= x_{n-j+i-s_{j+1}} \cdots x_{n-j+i-1} x_n^{i-1} \\ &= x_{n-(j-i+1)+1-s_{j+1}} \cdots x_{n-(j-i+1)} x_n^{i-1}. \end{aligned}$$

Tomemos $u'_j = x_{n-j+1-s_{j+i}} \cdots x_{n-j}$, para qualquer $1 \leq j \leq \ell - i + 1$, e $u'_j = w_j$, para qualquer $\ell - i + 2 \leq j \leq \ell$. Então, para qualquer $1 \leq j \leq \ell$, u'_j é um sufixo de w_j (com comprimento s_{j+i}, para $1 \leq j \leq \ell - i$, e com comprimento k, para $\ell - i + 1 \leq j \leq \ell$),

$$0 < |u'_1| \leq \cdots \leq |u'_{\ell-i+1}| = k = |u'_{\ell-i+2}| = \cdots = |u'_\ell|,$$

$$\begin{aligned} z &= x_n^{n-1}\Big(\prod_{j=i}^{\ell} \overline{u}_j\Big)x_0^\ell \\ &= x_n^{n-i}x_n^{i-1}\Big(\prod_{j=i}^{\ell} \overline{u}_j\Big)x_0^\ell \\ &= x_n^{n-i}\Big(\prod_{j=1}^{\ell-i+1} u'_j\Big)x_n^{i-1}x_0^\ell \\ &= x_n^{n-i}\Big(\prod_{j=1}^{\ell-i+1} u'_j\Big)w_{\ell-(i-1)+1}\cdots w_\ell x_0^\ell \quad \text{(pelo Lema 3.4.13)} \\ &= x_n^{n-i}\Big(\prod_{j=1}^{\ell} u'_j\Big)x_0^\ell \end{aligned}$$

e $k \leq n - i \leq n - 2$, como queríamos demonstrar. ∎

Finalmente, podemos provar que a linguagem $\overline{W}$ goza da seguinte propriedade:

Proposição 3.4.16. *Seja $w \in X^*$. Então, existe $\overline{w} \in \overline{W}$ tal que a relação $w = \overline{w}$ é uma consequência de $\overline{\mathrm{R}}$.*

Demonstração. Tomemos $w \in X^*$. Então, pelo Corolário 3.4.11, existem $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ e $v \in Y^*$ tais que $w = x_n^i v$ é uma consequência de $\overline{\mathrm{R}}$. Por outro lado, pela Proposição 2.4.13, existe uma palavra $w' \in W$ tal que a relação $v = w'$ é uma consequência de $\overline{\mathrm{R}}$. Se $w' \in W_n$ então $w' \equiv 1$, pelo que $w = x_n^i$ é uma consequência de $\overline{\mathrm{R}}$ e $x_n^i \in \overline{W}_n$. Se $w' \in W_0$ então $w' \equiv x_0^n$ e portanto, pelo Lema 3.4.7, $w = x_n^i x_0^n = x_0^n$ é uma consequência de $\overline{\mathrm{R}}$ e $x_0^n \in \overline{W}_0$. Suponhamos que $w' \in W_k$, para algum $1 \leq k \leq n-1$. Sejam $\ell = n - k$ e $w_1, \ldots, w_\ell$ as palavras k-principais. Então

$$w' \equiv \Big(\prod_{j=1}^{\ell} u_j\Big)x_0^\ell\Big(\prod_{j=1}^{\ell} v_j\Big),$$

em que u_j é um sufixo de w_j e v_j é um prefixo de w_j, para qualquer $1 \leq j \leq \ell$, $0 \leq |u_1| \leq \cdots \leq |u_\ell| \leq k$ e $k \geq |v_1| \geq \cdots \geq |v_\ell| \geq 0$. Se u_1 é não vazio, então $w = x_n^i w'$ é uma consequência de $\overline{\mathrm{R}}$ e $x_n^i w' \in \overline{W}_k$. Por outro lado, admitamos que $|u_1| = 0$. Então, pelo Lema 3.4.15, existem $t \in \{k, \ldots, n-1\}$ e sufixos $u'_1, \ldots, u'_\ell$ de $w_1, \ldots, w_\ell$, respectivamente, com $0 < |u'_1| \leq |u'_2| \leq \cdots \leq |u'_\ell|$, tais que

$$\Big(\prod_{j=2}^{\ell} u_j\Big)x_0^\ell = x_n^t\Big(\prod_{j=1}^{\ell} u'_j\Big)x_0^\ell$$

é uma consequência de $\overline{\mathrm{R}}$. Tomemos $p = i + t$ se $i + t \leq n - 1$, caso contrário, tomemos $p = i + t - n$. Então $0 \leq p \leq n - 1$ e, aplicando R_9 se necessário, temos $x_n^{i+t} = x_n^p$.

Logo,

$$\begin{aligned} w &= x_n^i w' \\ &\equiv x_n^i\left(\prod_{j=2}^{\ell} u_j\right)x_0^{\ell}\left(\prod_{j=1}^{\ell} v_j\right) \\ &= x_n^i x_n^t\left(\prod_{j=1}^{\ell} u'_j\right)x_0^{\ell}\left(\prod_{j=1}^{\ell} v_j\right) \\ &= x_n^p\left(\prod_{j=1}^{\ell} u'_j\right)x_0^{\ell}\left(\prod_{j=1}^{\ell} v_j\right) \end{aligned}$$

é uma consequência de $\overline{\mathrm{R}}$ e $x_n^p\left(\prod_{j=1}^{\ell} u'_j\right)x_0^{\ell}\left(\prod_{j=1}^{\ell} v_j\right) \in \overline{W}_k$. ∎

Atendendo às Proposições 3.4.1, 3.4.2 e 3.4.16, estão agora satisfeitas as condições da Proposição 1.7.2. Fica assim demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 3.4.17. *O monóide $\mathcal{POPI}_n$ é definido pela apresentação $\langle X \mid \overline{\mathrm{R}}\rangle$.* ∎

Vimos na secção 2 que $\mathcal{POPI}_n$ tem característica 2. Terminamos esta secção exibindo uma nova apresentação para os monóides $\mathcal{POPI}_n$ com apenas dois geradores.

Seja $Z = \{x_1, x_n\}$. Seja $\varphi : X^* \to Z^*$ o homomorfismo de monóides definido por:

1. $x_0\varphi = x_n^{n-1}(x_1x_n)^{n-1}$;

2. $x_1\varphi = x_1$;

3. $x_i\varphi = x_n^{i-1}x_1x_n^{n-i+1}$, para qualquer $2 \le i \le n-1$.

Consideremos

$$\overline{\mathrm{R}}_{\varphi} = \{u\varphi = v\varphi \mid (u = v) \in \overline{\mathrm{R}}\}.$$

Então:

Corolário 3.4.18. *O monóide $\mathcal{POPI}_n$ é definido pela apresentação $\langle Z \mid \overline{\mathrm{R}}_{\varphi}\rangle$.*

Demonstração. Consideremos as seguintes relações:

(R_{10}) $x_0 = x_n^{n-1}(x_1x_n)^{n-1}$ e $x_i = x_n^{i-1}x_1x_n^{n-i+1}$, para $2 \le i \le n-1$.

Pelo Lema 3.2.4, o conjunto de geradores A de $\mathcal{POPI}_n$ satisfaz todas as relações de R_{10}. Por conseguinte, uma vez que $\langle X \mid \overline{\mathrm{R}}\rangle$ é uma apresentação para $\mathcal{POPI}_n$, atendendo à Proposição 1.7.1, concluímos que cada uma das relações de R_{10} é uma consequência de $\overline{\mathrm{R}}$. Logo, pela Proposição 1.7.3, $\mathcal{POPI}_n$ é ainda definido pela apresentação $\langle X \mid \overline{\mathrm{R}} \cup \mathrm{R}_{10}\rangle$ (aplicando transformações de Tietze do tipo (T1) a $\langle X \mid \overline{\mathrm{R}}\rangle$). Por outro lado, aplicando sucessivas transformações de Tietze do tipo (T4) a $\langle X \mid \overline{\mathrm{R}} \cup \mathrm{R}_{10}\rangle$, usando cada uma das relações de R_{10}, obtemos a apresentação $\langle Z \mid \overline{\mathrm{R}}_{\varphi}\rangle$. Pela Proposição 1.7.3, concluímos que $\langle Z \mid \overline{\mathrm{R}}_{\varphi}\rangle$ é também uma apresentação para o monóide $\mathcal{POPI}_n$. ∎

Exemplo 3.4.2. Para o monóide $\mathcal{POPI}_4$ temos a seguinte apresentação com cinco geradores

$$\begin{aligned}\langle x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \quad | \quad & x_1x_0 = x_0x_2,\ x_2x_0 = x_0x_3,\ x_3x_1 = x_1x_3,\ x_0^2x_1 = x_0^2,\\ & x_3x_0^2 = x_0^2,\ x_2x_1x_2 = x_2x_1,\ x_1x_2x_1 = x_2x_1,\ x_3x_2x_3 = x_3x_2,\\ & x_2x_3x_2 = x_3x_2,\ x_0x_1x_2x_3x_0 = x_0,\ x_1x_2x_3x_0x_1 = x_1,\\ & x_2x_3x_0x_1x_2 = x_2,\ x_3x_0x_1x_2x_3 = x_3,\ x_2x_3x_0x_1^2 = x_1^2,\\ & x_3x_0x_1x_2^2 = x_2^2,\ x_0x_1x_2x_3^2 = x_3^2,\ x_4x_1 = x_2x_4,\ x_4x_2 = x_3x_4,\\ & x_4x_0x_1 = x_1,\ x_3x_0x_4 = x_3,\ x_4^4 = 1\rangle\end{aligned}$$

e a seguinte apresentação com dois geradores

$$\begin{aligned}\langle x, g \,|\, & xg^3(xg)^3 = g^3(xg)^3gxg^3,\ gxg^3g^3(xg)^3 = g^3(xg)^3g^2xg^2,\ g^2xg^2x = xg^2xg^2,\\ & (g^3(xg)^3)^2x = (g^3(xg)^3)^2,\ g^2xg^2(g^3(xg)^3)^2 = (g^3(xg)^3)^2,\ gxg^3xgxg^3 = gxg^3x,\\ & xgxg^3x = gxg^3x,\ g^2xg^2gxg^3g^2xg^2 = g^2xg^2gxg^3,\ gxg^3g^2xg^2gxg^3 = g^2xg^2gxg^3,\\ & g^3(xg)^3xgxg^3g^2xg^2g^3(xg)^3 = g^3(xg)^3,\ xgxg^3g^2xg^2g^3(xg)^3x = x,\\ & gxg^3g^2xg^2g^3(xg)^3xgxg^3 = gxg^3,\ g^2xg^2g^3(xg)^3xgxg^3g^2xg^2 = g^2xg^2,\\ & gxg^3g^2xg^2g^3(xg)^3x^2 = x^2,\ g^2xg^2g^3(xg)^3x(gxg^3)^2 = (gxg^3)^2,\\ & g^3(xg)^3xgxg^3(g^2xg^2)^2 = (g^2xg^2)^2,\ gx = gxg^3g,\ ggxg^3 = g^2xg^2g,\\ & gg^3(xg)^3x = x,\ g^2xg^2g^3(xg)^3g = g^2xg^2,\ g^4 = 1\rangle.\end{aligned}$$

Fazendo uso da relação $g^4 = 1$, podemos simplificar algumas das relações desta última apresentação, obtendo ainda a seguinte apresentação para $\mathcal{POPI}_4$:

$$\begin{aligned}\langle x, g \,|\, & xg^3(xg)^2x = g^3(xg)^3gxg^2,\ xg^2(xg)^2x = g^2(xg)^3g^2xg,\ g^2xg^2x = xg^2xg^2,\\ & (xg)^2x(xg)^3x = (xg)^2x(xg)^3,\ xg(xg)^2x(xg)^2x = g(xg)^2x(xg)^2x,\\ & xg^3xgxg^3 = xg^3x,\ xgxg^3x = gxg^3x,\ xg^3xgx = xg^3xg,\\ & (xg)^8x = (xg)^2x,\ (xg)^6x = x,\ g(xg)^5x^2 = x^2,\\ & (xg)^3x = x,\ g^4 = 1\rangle.\end{aligned}$$

Capítulo 4

Pseudovariedades geradas por semigrupos de transformações crescentes e generalizações

Na primeira secção deste capítulo temos por objectivo mostrar que a pseudovariedade de semigrupos $\boldsymbol{POI}$ gerada por todos os semigrupos de transformações parciais injectivas crescentes sobre uma cadeia finita e a pseudovariedade de semigrupos $\boldsymbol{POPI}$ gerada por todos os semigrupos de transformações parciais injectivas que preservam a orientação sobre uma cadeia finita são subpseudovariedades das pseudovariedades de semigrupos $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{OP}$, respectivamente. Com este propósito, dados um conjunto X e um subconjunto Y de X, começamos por construir um submonóide $M(Y)$ de $\mathcal{PT}(X)$ e um homomorfismo "natural" de $M(Y)$ em $\mathcal{PT}(Y)$. Seguidamente, usamos estas construções para mostrar que $\mathcal{POI}_n$ divide $\mathcal{O}_{2n+1}$ e que $\mathcal{POPI}_n$ divide $\mathcal{OP}_{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Na secção 2, apresentamos outra subclasse de $\boldsymbol{O}$. Na terceira secção introduzimos o conceito de semigrupo normalmente ordenado e mostramos que a classe $\boldsymbol{NOS}$ de todos os semigrupos normalmente ordenados é uma pseudovariedade de semigrupos.

1. As inclusões $\boldsymbol{POI} \subset \boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{POPI} \subset \boldsymbol{OP}$

Neste capítulo consideramos algumas pseudovariedades de semigrupos geradas por semigrupos de transformações crescentes ou de transformações que preservam a orientação. Nomeadamente, consideramos as pseudovariedades de semigrupos:

1. $\boldsymbol{PO}$ gerada por $\{\mathcal{PO}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

2. $\boldsymbol{O}$ gerada por $\{\mathcal{O}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

3. $\boldsymbol{POI}$ gerada por $\{\mathcal{POI}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

4. $\boldsymbol{OP}$ gerada por $\{\mathcal{OP}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; e

5. $\boldsymbol{POPI}$ gerada por $\{\mathcal{POPI}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Tendo em conta que $\mathcal{POI}_n \times \mathcal{POI}_m$ é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de $\mathcal{POI}_{n+m}$ (Proposição 2.1.5), para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$, concluímos que $\boldsymbol{POI}$ é a classe de todos os *divisores* de algum membro de $\{\mathcal{POI}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Resultados análogos são válidos para as pseudovariedades de semigrupos $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{PO}$ (veja-se [22]). Por outro lado, atendendo ao Corolário 3.1.9, podemos afirmar que tal não se passa para a pseudovariedade de semigrupos $\boldsymbol{POPI}$.

Sejam X um conjunto não vazio, Y um subconjunto de X e

$$\begin{aligned} M(Y) &= \{s \in \mathcal{PT}(X) \mid \text{para qualquer } x \in \mathrm{Dom}(s),\ xs \in Y \text{ implica } x \in Y\} \\ &= \{s \in \mathcal{PT}(X) \mid Ys^{-1} \subseteq Y\}. \end{aligned}$$

Observemos que, se $Y = \emptyset$ ou $Y = X$ então $M(Y) = \mathcal{PT}(X)$. Podemos garantir que $M(Y)$ constitui uma parte não vazia de $\mathcal{PT}(X)$, uma vez que possui a transformação identidade sobre X. Além disso, $M(Y)$ constitui um submonóide de $\mathcal{PT}(X)$. De facto, dados $s, t \in M(Y)$, temos $Y(st)^{-1} = Yt^{-1}s^{-1} \subseteq Ys^{-1} \subseteq Y$, donde $st \in M(Y)$.

Para cada $s \in M(Y)$, denotemos por $\bar{s}$ a restrição de s ao subconjunto Ys^{-1} de Y, i.e. $\bar{s}$ é a transformação de $\mathcal{PT}(Y)$ definida por:

- $\mathrm{Dom}(\bar{s}) = Ys^{-1} = \{x \in \mathrm{Dom}(s) \mid xs \in Y\} \subseteq Y$; e
- Para qualquer $x \in \mathrm{Dom}(\bar{s})$, $x\bar{s} = xs$.

O resultado seguinte estabelece uma representação natural do monóide $M(Y)$ em termos de transformações parciais sobre Y.

Proposição 4.1.1. *A aplicação $\varphi : M(Y) \to \mathcal{PT}(Y)$ definida por $s\varphi = \bar{s}$, para qualquer $s \in M(Y)$, é um homomorfismo de monóides.*

Demonstração. Observemos em primeiro lugar que a imagem por φ da identidade de $M(Y)$ é a identidade de $\mathcal{PT}(Y)$. Sejam $s, t \in M(Y)$. Tomemos $r = st$. O nosso objectivo é provar que $\bar{r} = \bar{s}\bar{t}$. Assim, comecemos por mostrar que $\mathrm{Dom}(\bar{r}) = \mathrm{Dom}(\bar{s}\bar{t})$. Seja $x \in \mathrm{Dom}(\bar{r})$, i.e. $x \in \mathrm{Dom}(r)$ e $xr \in Y$. Então, $x \in \mathrm{Dom}(s)$, $xs \in \mathrm{Dom}(t)$ e da condição $(xs)t = xr \in Y$ resulta que $xs \in Y$. Logo, $x \in \mathrm{Dom}(\bar{s})$ e $xs \in \mathrm{Dom}(\bar{t})$, donde $x \in \mathrm{Dom}(\bar{s}\bar{t})$. Reciprocamente, tomemos $x \in \mathrm{Dom}(\bar{s}\bar{t})$. Então, $x \in \mathrm{Dom}(\bar{s})$ e $xs = x\bar{s} \in \mathrm{Dom}(\bar{t})$. Logo, $x \in \mathrm{Dom}(s)$, $xs \in \mathrm{Dom}(t)$ e $xr = (xs)t \in Y$, donde $x \in \mathrm{Dom}(\bar{r})$. Mostrámos pois que $\mathrm{Dom}(\bar{r}) = \mathrm{Dom}(\bar{s}\bar{t})$. Por fim, tomemos um elemento x em $\mathrm{Dom}(\bar{r})$. Então, $x\bar{r} = xr = (xs)t = (x\bar{s})t = (x\bar{s})\bar{t}$. Portanto $\bar{r} = \bar{s}\bar{t}$, ou seja, $(st)\varphi = s\varphi t\varphi$. ∎

No resto desta secção estudamos dois casos particulares do homomorfismo anterior, estabelecendo a partir deles os resultados referidos na introdução deste capítulo.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Tal como atrás, seja $X_n = \{1 < 2 < \cdots < n\}$. Consideremos a cadeia $X_{2n+1} = \{1 < 2 < \cdots < 2n < 2n+1\}$ e a sua subcadeia $\overline{X}_n = \{2 < 4 < \cdots < 2n\}$. Uma vez que X_{2n+1} é uma cadeia com $2n+1$ elementos e $\overline{X}_n$ é uma cadeia com n elementos, podemos considerar os monóides $\mathcal{O}_{2n+1}$ e $\mathcal{POI}_n$ construídos à custa de X_{2n+1} e de $\overline{X}_n$, respectivamente.

Seja $U = M(\overline{X}_n) \cap \mathcal{O}_{2n+1}$, em que $M(\overline{X}_n)$ denota o submonóide de $\mathcal{PT}(X_{2n+1})$ cujos elementos são todas as transformações s tais que $\overline{X}_n s^{-1} \subseteq \overline{X}_n$. Então, U é um submonóide de $\mathcal{O}_{2n+1}$ e podemos considerar a aplicação $\alpha : U \to \mathcal{PT}(\overline{X}_n)$ definida por $s\alpha = \bar{s}$, em que $\bar{s}$ denota a restrição de s ao conjunto $\overline{X}_n s^{-1}$, para qualquer $s \in U$.

Atendendo à Proposição 4.1.1, α é um homomorfismo de monóides. Além disso, $U\alpha = \mathcal{POI}_n$. Com efeito, comecemos por ver que $U\alpha \subseteq \mathcal{I}(\overline{X}_n)$. Seja $s \in U$. Se $\bar{s}$ não é uma transformação injectiva, existem $x, y \in \mathrm{Dom}(\bar{s}) = \overline{X}_n s^{-1} \subseteq \overline{X}_n$ tais que $x < y$ e $xs = ys$. Uma vez que $x, y \in \overline{X}_n$, então $x < x+1 < y$ e $x+1 \notin \overline{X}_n$. Ora, $s \in \mathcal{O}_{2n+1}$, pelo que $xs \leq (x+1)s \leq ys$ e portanto $(x+1)s = xs \in \overline{X}_n$. Logo, $x+1 \in \overline{X}_n s^{-1} \subseteq \overline{X}_n$, contra a hipótese. Assim, $U\alpha \subseteq \mathcal{I}(\overline{X}_n)$. Por outro lado, atendendo a que $\bar{s}$ é uma restrição de s e que s é uma transformação crescente, $\bar{s}$ é também uma transformação crescente, pelo que $U\alpha \subseteq \mathcal{POI}_n$. Com vista a estabelecer a inclusão recíproca, tomemos $t \in \mathcal{POI}_n$. Admitamos que $t = 0$. Uma vez que qualquer transformação constante s de $\mathcal{T}(X_{2n+1})$ com imagem em $X_{2n+1} \setminus \overline{X}_n$ é um elemento de U e a sua imagem $\bar{s}$ por α é a transformação vazia, temos $0 = s\alpha \in U\alpha$. Suponhamos agora que $t \neq 0$. Para $1 \leq k \leq n$, denotemos por $\bar{k}$ o elemento $2k$ de $\overline{X}_n$. Observemos que, com esta notação, $\overline{X}_n = \{\bar{k} = 2k \mid 1 \leq k \leq n\}$. Sejam $x_1, \ldots, x_k \in X_n$ (com $1 \leq k \leq n$) tais que $x_1 < \cdots < x_k$ e $\mathrm{Dom}(t) = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}$. Definimos uma transformação s de $\mathcal{T}(X_{2n+1})$ da seguinte forma:

$$xs = \begin{cases} 1, & \text{se } 1 \leq x < \bar{x}_1 \\ \bar{x}_i t, & \text{se } x = \bar{x}_i, \text{ para algum } i \in \{1, \ldots, k\} \\ \bar{x}_i t + 1, & \text{se } \bar{x}_i < x < \bar{x}_{i+1}, \text{ para algum } i \in \{1, \ldots, k-1\} \\ 2n+1, & \text{se } \bar{x}_k < x \leq 2n+1, \end{cases}$$

i.e.

$$s = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc} 1 & \cdots & \bar{x}_1 - 1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 + 1 & \cdots & \bar{x}_2 - 1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2 + 1 & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 & \bar{x}_1 t & \bar{x}_1 t + 1 & \cdots & \bar{x}_1 t + 1 & \bar{x}_2 t & \bar{x}_2 t + 1 & \cdots \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{cc|c|ccc|c|ccc} \cdots & \bar{x}_{k-1} - 1 & \bar{x}_{k-1} & \bar{x}_{k-1} + 1 & \cdots & \bar{x}_k - 1 & \bar{x}_k & \bar{x}_k + 1 & \cdots & 2n+1 \\ \cdots & \bar{x}_{k-2} + 1 & \bar{x}_{k-1} t & \bar{x}_{k-1} t + 1 & \cdots & \bar{x}_{k-1} t + 1 & \bar{x}_k t & 2n+1 & \cdots & 2n+1 \end{array} \right).$$

Tomando $n = 5$, ilustramos esta construção com os exemplos seguintes:

1. Se $t = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \end{pmatrix}$ então $s = \begin{pmatrix} 1 & \bar{1} & 3 & \bar{2} & 5 & \bar{3} & 7 & \bar{4} & 9 & \bar{5} & 11 \\ 1 & 1 & 1 & \bar{1} & 3 & 3 & 3 & \bar{3} & 7 & \bar{4} & 11 \end{pmatrix}$;

2. Se $t = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{5} \end{pmatrix}$ então $s = \begin{pmatrix} 1 & \bar{1} & 3 & \bar{2} & 5 & \bar{3} & 7 & \bar{4} & 9 & \bar{5} & 11 \\ 1 & \bar{1} & 3 & \bar{3} & 7 & \bar{5} & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \end{pmatrix}$.

Atendendo a que t é uma transformação crescente, temos que $s \in \mathcal{O}_{2n+1}$. Por outro lado, é também claro que $\overline{X}_n s^{-1} = \mathrm{Dom}(t) \subseteq \overline{X}_n$ e que a restrição de s ao conjunto $\overline{X}_n s^{-1}$ coincide com t. Assim, $s \in U$ e $s\alpha = t$, donde $t \in U\alpha$.

Provámos então que $U\alpha = \mathcal{POI}_n$. Como U é um submonóide de $\mathcal{O}_{2n+1}$, a igualdade que acabámos de estabelecer permite-nos concluir o resultado seguinte.

Teorema 4.1.2. *O monóide $\mathcal{POI}_n$ divide $\mathcal{O}_{2n+1}$.* ∎

Observemos que, uma vez que a pseudovariedade ***POI*** é gerada por semigrupos inversos, temos ***POI*** $\subseteq$ ***Ecom***. Logo, $\mathcal{O}_n \notin$ ***POI***, para $n \geq 2$, uma vez que os seus idempotentes, em geral, não comutam. Tendo em conta esta observação e o teorema anterior podemos afirmar que:

Corolário 4.1.3. ***POI*** $\subset$ ***O***. ∎

Observemos que a demonstração do resultado anterior aqui apresentada difere um pouco da prova original (veja-se [13]). Uma terceira prova do resultado estabelecido neste corolário, que se deve a P. Higgins, pode ser encontrada em [22]. Neste artigo P. Higgins mostra que o monóide $\mathcal{POI}_n$ divide $\mathcal{O}_{2n+3}$.

Consideremos agora a cadeia $X_{2n} = \{1 < 2 < \cdots < 2n\}$ e a sua subcadeia $\overline{X}_n = \{\bar{k} = 2k \mid 1 \leq k \leq n\} = \{2 < 4 < \cdots < 2n\}$. Como $\overline{X}_n$ é uma cadeia com n elementos, podemos considerar o monóide $\mathcal{POPI}_n$ construído à custa de $\overline{X}_n$.

Designemos por $M(\overline{X}_n)$ o submonóide de $\mathcal{PT}(X_{2n})$ constituído por todas as transformações s tais que $\overline{X}_n s^{-1} \subseteq \overline{X}_n$. Seja $V = M(\overline{X}_n) \cap \mathcal{OP}_{2n}$. Então, V é um submonóide de $\mathcal{OP}_{2n}$ e podemos considerar a aplicação $\beta : V \to \mathcal{PT}(\overline{X}_n)$ definida por $s\beta = \bar{s}$, em que $\bar{s}$ denota a restrição de s ao conjunto $\overline{X}_n s^{-1}$, para qualquer $s \in V$. Uma vez mais, atendendo à Proposição 4.1.1, podemos afirmar que β é um homomorfismo de monóides. Como qualquer restrição de uma transformação que preserva a orientação é ainda uma transformação que preserva a orientação (Proposição 3.1.1), podemos considerar β definida de V em $\mathcal{POP}_n$.

Seguidamente, provamos que $V\beta = \mathcal{POPI}_n$.

Em primeiro lugar, tomemos $s \in V$. Suponhamos que $\overline{s}$ não é injectiva. Então, existem $x, y \in \overline{X}_n s^{-1} \subseteq \overline{X}_n$ tais que $x < y$ e $xs = ys$. Observemos que

$$1 < x < x + 1 < y.$$

Além disso, uma vez que $xs \in \overline{X}_n$ e $(x+1)s \notin \overline{X}_n$, então $xs \neq (x+1)s$. Se $xs > (x+1)s$, como a restrição de s a $\{1, x, x+1, y\}$ preserva a orientação, obtemos

$$(x + 1)s \leq ys \leq 1s \leq xs.$$

De facto, como $xs \in \overline{X}_n$ e $1s \notin \overline{X}_n$, temos $1s \neq xs$, donde $ys < xs$, contra a hipótese. Logo, $ys = xs < (x + 1)s$, pelo que

$$ys < 1s < xs < (x + 1)s,$$

donde $ys < xs$, uma vez mais contra a hipótese. Portanto, $xs \neq ys$, pelo que $\bar{s}$ é injectiva. Consequentemente, $V\beta \subseteq \mathcal{POPI}_n$. Com o objectivo de estabelecer a inclusão recíproca, comecemos por observar que, dado um elemento $s \in V$ tal que $\mathrm{Im}(s) \subseteq X_{2n} \setminus \overline{X}_n$, a sua imagem pelo homomorfismo β é a transformação vazia e que, por outro lado, a existência de transformações s em V nestas condições está garantida. Com efeito, qualquer transformação constante de imagem em $X_{2n} \setminus \overline{X}_n$ (e domínio X_{2n}) satisfaz as condições referidas. Assim, $0\beta^{-1} \neq \emptyset$ e portanto $0 \in V\beta$.

Tomemos agora uma transformação não vazia t de $\mathcal{POPI}_n$ e sejam $x_1, \ldots, x_k \in X_n$ (com $1 \leq k \leq n$) tais que $x_1 < \cdots < x_k$ e $\mathrm{Dom}(t) = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}$.

Suponhamos em primeiro lugar que t é uma transformação crescente. Definimos uma transformação s em $\mathcal{T}(X_{2n})$ da seguinte forma:

$$xs = \begin{cases} 1, & \text{se } 1 \leq x < \bar{x}_1 \\ \bar{x}_i t, & \text{se } x = \bar{x}_i, \text{ para algum } i \in \{1, \ldots, k\} \\ \bar{x}_i t + 1, & \text{se } \bar{x}_i < x < \bar{x}_{i+1}, \text{ para algum } i \in \{1, \ldots, k-1\} \\ 1, & \text{se } \bar{x}_k < x \leq 2n, \end{cases}$$

i.e.

$$s = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc|c|cc} 1 & \cdots & \bar{x}_1 - 1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 + 1 & \cdots & \bar{x}_2 - 1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2 + 1 & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 & \bar{x}_1 t & \bar{x}_1 t + 1 & \cdots & \bar{x}_1 t + 1 & \bar{x}_2 t & \bar{x}_2 t + 1 & \cdots \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{cc|c|ccc|c|ccc} \cdots & \bar{x}_{k-1} - 1 & \bar{x}_{k-1} & \bar{x}_{k-1} + 1 & \cdots & \bar{x}_k - 1 & \bar{x}_k & \bar{x}_k + 1 & \cdots & 2n \\ \cdots & \bar{x}_{k-2} + 1 & \bar{x}_{k-1} t & \bar{x}_{k-1} t + 1 & \cdots & \bar{x}_{k-1} t + 1 & \bar{x}_k t & 1 & \cdots & 1 \end{array} \right).$$

Considerando $n = 5$, vejamos como ilustração da definição anterior os seguintes exemplos:

1. Se $t = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} \end{pmatrix}$ então $s = \begin{pmatrix} 1 & \bar{1} & 3 & \bar{2} & 5 & \bar{3} & 7 & \bar{4} & 9 & \bar{5} \\ 1 & 1 & 1 & \bar{1} & 3 & 3 & 3 & \bar{3} & 7 & \bar{4} \end{pmatrix}$;

2. Se $t = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{5} \end{pmatrix}$ então $s = \begin{pmatrix} 1 & \bar{1} & 3 & \bar{2} & 5 & \bar{3} & 7 & \bar{4} & 9 & \bar{5} \\ 1 & \bar{1} & 3 & \bar{3} & 7 & \bar{5} & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(Compare com os exemplos da página 104.)

Uma vez que t é uma transformação crescente, por simples observação de s, podemos concluir que $s \in \mathcal{OP}_{2n}$ (observemos que a transformação s é crescente se e só se $x_k = n$), $\overline{X}_n s^{-1} = \mathrm{Dom}(t) \subseteq \overline{X}_n$ e a restrição de s ao conjunto $\overline{X}_n s^{-1}$ coincide com t, pelo que $s \in V$ e $s\beta = t$.

Admitamos agora que a transformação t pertence a $\mathcal{POPI}_n \setminus \mathcal{POI}_n$. Tomemos $p \in \{1, \dots, k-1\}$ tal que $\bar{x}_p t > \bar{x}_{p+1} t$. Observemos então que

$$\bar{x}_{p+1} t < \cdots < \bar{x}_k t < \bar{x}_1 t < \bar{x}_2 t < \cdots < \bar{x}_p t.$$

Nestas condições, definimos uma transformação s de $\mathcal{T}(X_{2n})$ da seguinte forma:

$$xs = \begin{cases} \bar{x}_k t + 1, & \text{se } 1 \leq x < \bar{x}_1 \\ \bar{x}_i t, & \text{se } x = \bar{x}_i, \text{ para algum } i \in \{1, \dots, k\} \\ \bar{x}_i t + 1, & \text{se } \bar{x}_i < x < \bar{x}_{i+1}, \text{ para algum } i \in \{1, \dots, k-1\} \setminus \{p\} \\ 1, & \text{se } \bar{x}_p < x < \bar{x}_{p+1} \\ \bar{x}_k t + 1, & \text{se } \bar{x}_k < x \leq 2n, \end{cases}$$

i.e.

$$s = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 \;\cdots\; \bar{x}_1 - 1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 + 1 \cdots \bar{x}_2 - 1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2 + 1 \cdots \;\; \bar{x}_p - 1 & \bar{x}_p \\ \bar{x}_k t + 1 \cdots \bar{x}_k t + 1 & \bar{x}_1 t & \bar{x}_1 t + 1 \cdots \bar{x}_1 t + 1 & \bar{x}_2 t & \bar{x}_2 t + 1 \cdots \bar{x}_{p-1} t + 1 & \bar{x}_p t \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{c|c|c|c|c} \bar{x}_p + 1 \cdots \bar{x}_{p+1} - 1 & \bar{x}_{p+1} & \bar{x}_{p+1} + 1 \cdots \;\; \bar{x}_k - 1 & \bar{x}_k & \bar{x}_k + 1 \;\cdots\;\; 2n \\ 1 \;\;\cdots\;\; 1 & \bar{x}_{p+1} t & \bar{x}_{p+1} t + 1 \cdots \bar{x}_{k-1} t + 1 & \bar{x}_k t & \bar{x}_k t + 1 \cdots \bar{x}_k t + 1 \end{array} \right).$$

Ilustramos esta construção com os exemplos seguintes, tomando uma vez mais $n = 5$:

1. Se $t = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{5} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix}$ então $s = \begin{pmatrix} 1 & \bar{1} & 3 & \bar{2} & 5 & \bar{3} & 7 & \bar{4} & 9 & \bar{5} \\ 7 & \bar{4} & 1 & 1 & 1 & \bar{2} & 5 & 5 & 5 & \bar{3} \end{pmatrix}$;

2. Se $t = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \end{pmatrix}$ então $s = \begin{pmatrix} 1 & \bar{1} & 3 & \bar{2} & 5 & \bar{3} & 7 & \bar{4} & 9 & \bar{5} \\ 5 & \bar{3} & 7 & \bar{4} & 1 & 1 & 1 & \bar{2} & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Uma vez que $\bar{x}_{p+1} t < \cdots < \bar{x}_k t < \bar{x}_1 t < \bar{x}_2 t < \cdots < \bar{x}_p t$, então

$$1 < \bar{x}_{p+1} t < \bar{x}_{p+1} t + 1 < \cdots < \bar{x}_k t < \bar{x}_k t + 1 < \bar{x}_1 t < \bar{x}_1 t + 1 < \bar{x}_2 t < \bar{x}_2 t + 1 < \cdots < \bar{x}_p t,$$

sendo assim claro que a transformação s pertence a $\mathcal{OP}_{2n}$. Por outro lado, é também imediato que $\overline{X}_n s^{-1} = \mathrm{Dom}(t) \subseteq \overline{X}_n$ e que a restrição de s ao conjunto $\overline{X}_n s^{-1}$ coincide com t. Logo, também neste caso, $s \in V$ e $s\beta = t$, pelo que $t \in V\beta$.

Do exposto resulta que $V\beta = \mathcal{POPI}_n$, o que nos permite concluir o seguinte teorema:

Teorema 4.1.4. *O monóide $\mathcal{POPI}_n$ divide $\mathcal{OP}_{2n}$.* ∎

Como corolário do teorema anterior temos:

Corolário 4.1.5. $\boldsymbol{POPI} \subset \boldsymbol{OP}$. ∎

Observemos que a inclusão apresentada no corolário anterior é estrita, por razões análogas às invocadas no caso da inclusão $\boldsymbol{POI} \subset \boldsymbol{O}$.

Terminamos esta secção com uma propriedade da pseudovariedade $\boldsymbol{POPI}$ que resulta da Proposição 3.1.6:

Teorema 4.1.6. $\boldsymbol{POPI} \cap \boldsymbol{G} = \boldsymbol{Ab}$.

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que $\mathcal{POPI}_n$ contém grupos cíclicos de ordem k (Proposição 3.1.6), para qualquer $1 \leq k \leq n$, então a pseudovariedade $\boldsymbol{POPI}$ contém todos os grupos cíclicos de ordem finita. Logo, pelo *Teorema Fundamental dos Grupos Abelianos Finitos* (veja-se [27]), $\boldsymbol{POPI}$ contém todos os grupos abelianos finitos. Reciprocamente, como $\boldsymbol{POPI}$ é gerada por semigrupos cujos grupos são abelianos (Proposição 3.1.6), então qualquer grupo de $\boldsymbol{POPI}$ é abeliano, tendo em conta a Proposição 1.8.3. Assim, $\boldsymbol{POPI} \cap \boldsymbol{G} = \boldsymbol{Ab}$. ∎

2. Outra subclasse de $\boldsymbol{O}$

Nesta secção apresentamos outra subclasse de $\boldsymbol{O}$. Recordemos que $\boldsymbol{O}$ contém todos os semigrupos $\mathcal{J}$-triviais e todos os semigrupos cujos idempotentes formam um ideal (veja-se a Introdução). Além disso, como vimos na secção anterior, $\boldsymbol{O}$ contém também a pseudovariedade de semigrupos $\boldsymbol{POI}$.

No que se segue, todas as cadeias são finitas e, além de conjuntos parcialmente ordenados, são também encaradas como semireticulados. Temos então o seguinte teorema que demonstramos à frente:

Teorema 4.2.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, C uma cadeia, $\varphi : \mathcal{POI}_n \to \mathrm{End}^r(C)$ um homomorfismo de monóides e $C * \mathcal{POI}_n$ o produto semidirecto associado a φ. Então, $C * \mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$.*

Ao contrário do que o resultado anterior nos poderia levar a crer, o exemplo abaixo mostra que é falso que $\boldsymbol{Sl} * \boldsymbol{POI}$ esteja contido em $\boldsymbol{O}$. De facto, visto que $\boldsymbol{Sl} * \boldsymbol{POI} \subseteq \boldsymbol{Sl} * \boldsymbol{O} = \boldsymbol{PO}$ (a este propósito, veja-se o trabalho [3] de J. Almeida e P. Higgins) poderemos conjecturar sobre a possibilidade de se ter $\boldsymbol{Sl} * \boldsymbol{POI} = \boldsymbol{PO}$. No entanto, a veracidade desta igualdade está, julgamos nós, por determinar.

Exemplo 4.2.1. Sejam $U_1 = \{0, 1\}$ um semireticulado com dois elementos e S o produto em coroa de U_1 e $\mathcal{POI}_2$ (recordemos que $S = U_1^{\mathcal{POI}_2} * \mathcal{POI}_2$, para certa acção de $\mathcal{POI}_2$ sobre $U_1^{\mathcal{POI}_2}$). Então, o semigrupo S não satisfaz a pseudoidentidade $x^\omega y(xy^2)^\omega = x^\omega(xy^2)^\omega$. De facto, atendendo ao Exemplo 2.4.1, podemos considerar

$$\mathcal{POI}_2 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 0, aba = a, bab = b\rangle = \{0, a, b, ab, ba, 1\}$$

e tomando

$$s = \begin{pmatrix} 0 & a & b & ab & ba & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad t = \begin{pmatrix} 0 & a & b & ab & ba & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

temos que $x = (s, ba)$ e $y = (t, b)$ são dois elementos de S tais que $x^\omega y(xy^2)^\omega \neq x^\omega(xy^2)^\omega$. Por outro lado, a pseudoidentidade considerada é satisfeita por $\boldsymbol{O}$ (veja-se [4, Proposição 2.3]). Logo $S \in \boldsymbol{Sl} * \boldsymbol{POI}$ e $S \notin \boldsymbol{O}$.

Com o objectivo de provar o teorema anterior, demonstramos primeiro alguns resultados auxiliares. De agora em diante, nesta secção, usamos o Teorema 4.1.2 (ou o Corolário 4.1.3) sem menção explícita.

Lema 4.2.2. *Sejam C uma cadeia e $\varphi : \mathcal{POI}_n \to \mathrm{End}^r(C)$ um homomorfismo de monóides. Se $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0\}$ ou $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{1\}$ ou $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0, 1\}$ e neste caso $(x)0\varphi = 0$, para qualquer $x \in C \setminus \{1\}$, então $t\varphi = 0\varphi$, para qualquer $t \in \mathcal{POI}_n \setminus \{1\}$.*

Demonstração. Se $|C| = 1$ ou $n = 1$, então o lema é imediato. Admitamos então que $|C| \geq 2$ e $n \geq 2$. Comecemos por observar que, dados idempotentes e e f de $\mathcal{POI}_n$ tais que $e \leq f$, então $e\varphi$ e $f\varphi$ são idempotentes de $\mathrm{End}^r(C)$ e $\mathrm{Im}(e\varphi) \subseteq \mathrm{Im}(f\varphi)$. Em seguida, atendendo ao Teorema 2.2.4, o núcleo de φ é a congruência de Rees associada ao ideal I_k de $\mathcal{POI}_n$ dos elementos de característica menor ou igual a k, para certo $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Suponhamos que $k < n - 1$. Por um lado, φ é injectiva na $\mathcal{J}$-classe J_{k+1} dos elementos de característica $k+1$ de $\mathcal{POI}_n$ e por outro J_{k+1} possui pelo menos dois idempotentes e e f distintos. Então, $e\varphi \neq f\varphi$, $e\varphi, f\varphi \neq 0\varphi$ e $(ef)\varphi = 0\varphi$, visto que a característica de ef é inferior ou igual a k. Analisamos agora, separadamente, os três casos do enunciado.

Admitamos em primeiro lugar que $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0, 1\}$, com $(x)0\varphi = 0$, para qualquer $x \in C \setminus \{1\}$. Observemos que, neste caso, $(1)0\varphi = 1$, pelo que, dados $t \in \mathcal{POI}_n$ e $x \in C \setminus \{1\}$, então $(x)t\varphi \neq 1$ (caso contrário, teríamos

$$0 = (x)0\varphi = (x)(0t)\varphi = (x)(t\varphi 0\varphi) = ((x)t\varphi)0\varphi = (1)0\varphi = 1.)$$

Logo, para qualquer $t \in \mathcal{POI}_n$ tal que $\mathrm{Im}(t\varphi) = \{0, 1\}$, temos $t\varphi = 0\varphi$. Consequentemente, $\{0, 1\} \subset \mathrm{Im}(e\varphi)$ e $\{0, 1\} \subset \mathrm{Im}(f\varphi)$, pelo que existem $x, y \in C \setminus \{0, 1\}$ tais que $(x)e\varphi = x$ e $(y)f\varphi = y$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x \leq y$. Então,

$$x = (x)e\varphi \leq (y)e\varphi = ((y)f\varphi)e\varphi = (y)(f\varphi e\varphi) = (y)(ef)\varphi = (y)0\varphi = 0,$$

contra a hipótese. Logo, neste caso, $k \geq n - 1$.

Seguidamente, admitamos que $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0\}$. Como $e\varphi, f\varphi \neq 0\varphi$, temos $\{0\} \subset \mathrm{Im}(e\varphi)$ e $\{0\} \subset \mathrm{Im}(f\varphi)$, pelo que existem $x, y \in C \setminus \{0\}$ tais que $(x)e\varphi = x$ e $(y)f\varphi = y$. Então, supondo que $x \leq y$, tal como no caso anterior, obtemos $x = 0$. Logo, também neste caso, chegamos a uma contradição, pelo que $k \geq n - 1$.

Finalmente, admitamos que $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{1\}$. Então, $\{1\} \subset \mathrm{Im}(e\varphi)$ e $\{1\} \subset \mathrm{Im}(f\varphi)$, pelo que existem $x, y \in C \setminus \{1\}$ tais que $(x)e\varphi = x$ e $(y)f\varphi = y$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x \leq y$. Então,

$$1 = (x)0\varphi = (x)(fe)\varphi = (x)(e\varphi f\varphi) = ((x)e\varphi)f\varphi = (x)f\varphi \leq (y)f\varphi = y,$$

o que, uma vez mais, é uma contradição.

Assim, em qualquer dos casos, $k \geq n - 1$. Então, dado $t \in \mathcal{POI}_n \setminus \{1\}$, a característica de t é menor ou igual a $n - 1$, pelo que $t \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, i.e. $t\varphi = 0\varphi$, como queríamos demonstrar. ■

Lema 4.2.3. *Sejam C uma cadeia e $\varphi : \mathcal{POI}_n \to \mathrm{End}^r(C)$ um homomorfismo de monóides tal que $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0\}$. Então, existe $W \in \boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{Ecom}$ tal que o produto semidirecto (associado a φ) $C * \mathcal{POI}_n$ é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de $W \times \mathcal{POI}_n$. Além disso, $C * \mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{POI}$.*

Demonstração. Nas condições do lema, atendendo ao Lema 4.2.2, temos que φ é constante em $\mathcal{POI}_n \setminus \{1\}$. Por conseguinte, pelo Lema 1.6.1, $C * \mathcal{POI}_n$ é isomorfo a um subsemigrupo de $(C * U_1) \times \mathcal{POI}_n$, em que U_1 é tomado como sendo o submonóide de $\mathcal{POI}_n$ formado pelo zero e pela identidade de $\mathcal{POI}_n$ e $C * U_1$ é o produto semidirecto associado à restrição de φ a U_1. Tendo em conta que $\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{Ecom} \subset \boldsymbol{POI}$ (veja-se [22]), para demonstrar o lema basta provar que $C * U_1$ é um semigrupo $\mathcal{J}$-trivial cujos idempotentes comutam.

Começamos por mostrar que $C * U_1 \in \boldsymbol{Ecom}$. Observemos que os idempotentes de $C*U_1$ são os elementos da forma $(x,1)$, com $x \in C$, e $(0,0)$. Assim, dados $x, y \in C$, temos

$$(x,1)(y,1) = (x(1.y),1) = (xy,1) = (yx,1) = (y(1.x),1) = (y,1)(x,1).$$

Além disso, para qualquer $x \in C$,

$$(x,1)(0,0) = (x(1.0),0) = (x0,0) = (0,0) = (00,0) = (0(0.x),0) = (0,0)(x,1),$$

pelo que, de facto, $C * U_1 \in \boldsymbol{Ecom}$.

Seguidamente, mostramos que $C * U_1$ é $\mathcal{J}$-trivial. Tomemos $x \in C$. Suponhamos que $(x,0)\,\mathcal{R}\,(y,u)$, para certo $(y,u) \in C * U_1$. Então, existem $(a,t),(b,q) \in C * U_1$ tais que $(y,u) = (x,0)(a,t)$ e $(x,0) = (y,u)(b,q)$. Logo, $(y,u) = (x(0.a),0) = (0,0)$, donde $(x,0) = (0,0)(b,q) = (0,0)$, i.e. $(y,u) = (x,0)$, pelo que $R_{(x,0)} = \{(x,0)\}$. Por outro lado, suponhamos que $(x,0)\,\mathcal{L}\,(y,u)$, para certo $(y,u) \in C * U_1$. Então, existem $(a,t),(b,q) \in C * U_1$ tais que $(y,u) = (a,t)(x,0)$ e $(x,0) = (b,q)(y,u)$. Logo, $(y,u) = (a(t.x),0)$, pelo que $u = 0$. Além disso, $y = a(t.x)$ e $x = b(q.y)$. Se $t \neq 1$ então $y = a(0.x) = a0 = 0$, logo $x = b(q.0) = b0 = 0$, donde $(y,u) = (x,0)$. Analogamente, se $q \neq 1$ então $(y,u) = (x,0)$. Finalmente, se $t = q = 1$ então $x = by \leq y = ax \leq x$ e, portanto, uma vez mais $(y,u) = (x,0)$. Assim, em $C * U_1$, temos $L_{(x,0)} = \{(x,0)\} = R_{(x,0)}$, pelo que $|J_{(x,0)}| = 1$. Consideremos agora o elemento $(x,1) \in C * U_1$. Suponhamos que $(x,1)\,\mathcal{R}\,(y,u)$, para certo $(y,u) \in C * U_1$. Então, existem $(a,t),(b,q) \in C * U_1$ tais que $(y,u) = (x,1)(a,t)$ e $(x,1) = (y,u)(b,q)$. Logo, $y = xa$, $x = y(u.b)$ e $1 = uq$. Então, necessariamente, $u = 1$ e $y = xa \leq x = yb \leq y$. Logo $(y,u) = (x,1)$, pelo que $R_{(x,1)} = \{(x,1)\}$. Por outro lado, suponhamos que $(x,1)\,\mathcal{L}\,(y,u)$, para certo $(y,u) \in C * U_1$. Então, existem $(a,t),(b,q) \in C * U_1$ tais que $(y,u) = (a,t)(x,1)$ e $(x,1) = (b,q)(y,u)$. Desta última igualdade resulta de imediato que $u = 1 = q$, pelo que $t = 1$ e, portanto, $x = by \leq y = ax \leq x$, donde $(y,u) = (x,1)$. Por conseguinte, em $C * U_1$, também temos $L_{(x,1)} = \{(x,1)\} = R_{(x,1)}$, pelo que $|J_{(x,1)}| = 1$. Concluímos então que $C * U_1$ é $\mathcal{J}$-trivial, terminando assim a prova do resultado. ∎

Lema 4.2.4. *Sejam C uma cadeia e $\varphi : \mathcal{POI}_n \to \mathrm{End}^r(C)$ um homomorfismo de monóides tal que $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{1\}$. Então, o produto semidirecto $C * \mathcal{POI}_n$ (associado a φ) é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de $\mathrm{End}^r(C) \times \mathcal{POI}_{n+1}$. Além disso, $C * \mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$.*

Demonstração. De modo análogo ao resultado anterior, atendendo ao Lema 4.2.2, φ é constante em $\mathcal{POI}_n \setminus \{1\}$, donde, pelo Lema 1.6.1, $C * \mathcal{POI}_n$ é isomorfo a um subsemigrupo de $(C * U_1) \times \mathcal{POI}_n$, em que U_1 é o submonóide de $\mathcal{POI}_n$ formado pelo zero e pela identidade de $\mathcal{POI}_n$ e $C * U_1$ é o produto semidirecto associado à restrição de φ a U_1. Como U_1 é isomorfo a $\mathcal{POI}_1$ e $\mathcal{POI}_1 \times \mathcal{POI}_n$ é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de $\mathcal{POI}_{n+1}$ (pela Proposição 2.1.5), para demonstrar a primeira parte do lema basta verificar que $C * U_1$ é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de $\mathrm{End}^r(C) \times U_1$. Definimos uma aplicação ψ de $C * U_1$ em $\mathrm{End}^r(C) \times U_1$ do seguinte modo: para qualquer $(x,t) \in C * U_1$,

$$(x,t)\psi = ((x,t)\psi_1, t),$$

em que ψ_1 é a aplicação de $C * U_1$ em $\mathrm{End}(C)$ definida por

$$(y)(x,0)\psi_1 = x$$

e

$$(y)(x,1)\psi_1 = xy,$$

para qualquer $y \in C$. Não há dúvida que $(x,t)\psi_1$ é um endomorfismo de C, para qualquer $(x,t) \in C * U_1$. Sejam $(x,t),(y,q) \in C * U_1$ tais que $(x,t)\psi = (y,q)\psi$. Então $t = q$ e $(x,t)\psi_1 = (y,q)\psi_1$. Logo $x = (x)(x,t)\psi_1 = (x)(y,q)\psi_1 \leq y = (y)(y,t)\psi_1 = (y)(x,q)\psi_1 \leq x$, donde $x = y$, pelo que a aplicação ψ é injectiva. Provemos agora que ψ_1 é um homomorfismo. Sejam $(x,t),(y,q) \in C * U_1$. Então, como $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{1\}$,

$$(x,t)(y,q) = (x(t.y), tq) = \begin{cases} (xy,q), & \text{se } t = 1 \\ (x,0), & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

pelo que:

1. Se $t = 0$, então $(z)((x,t)(y,q))\psi_1 = (z)(x,0)\psi_1 = x = ((z)(y,q)\psi_1)(x,0)\psi_1 = (z)(y,q)\psi_1(x,t)\psi_1$, para qualquer $z \in C$;

2. Se $t = 1$ e $q = 0$, então $(z)((x,t)(y,q))\psi_1 = (z)(xy,0)\psi_1 = xy = (y)(x,1)\psi_1 = ((z)(y,0)\psi_1)(x,1)\psi_1 = (z)(y,q)\psi_1(x,t)\psi_1$, para qualquer $z \in C$;

3. Se $t = 1$ e $q = 1$, então $(z)((x,t)(y,q))\psi_1 = (z)(xy,1)\psi_1 = xyz = (yz)(x,1)\psi_1 = ((z)(y,1)\psi_1)(x,1)\psi_1 = (z)(y,q)\psi_1(x,t)\psi_1$, para qualquer $z \in C$.

Logo, ψ_1 é um homomorfismo de $C * U_1$ em $\mathrm{End}^r(C)$. Consequentemente, ψ é um homomorfismo injectivo. Deste modo fica demonstrada a primeira parte do lema.

Seguidamente, provamos a segunda afirmação do lema. Tendo em conta a observação da página 28 (capítulo 1), sendo m o número de elementos da cadeia C, temos que $\mathrm{End}(C)$ é isomorfo ao monóide $\mathcal{O}_m$, pelo que, atendendo a [21, Teorema 2.4], $\mathrm{End}^r(C)$ é isomorfo a um subsemigrupo de $\mathcal{O}_{m+1}$. Logo, $C * \mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$, como queríamos demonstrar. ■

Lema 4.2.5. *Sejam C uma cadeia e $\varphi : \mathcal{POI}_n \to \mathrm{End}^r(C)$ um homomorfismo de monóides tal que $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0, 1\}$, com $(x)0\varphi = 0$, para qualquer $x \in C \setminus \{1\}$. Então, existe $W \in \boldsymbol{J}$ tal que o produto semidirecto (associado a φ) $C * \mathcal{POI}_n$ é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de $W \times \mathcal{POI}_n$. Além disso, $C * \mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$.*

Demonstração. Uma vez mais atendendo aos Lemas 4.2.2 e 1.6.1, podemos deduzir que $C * \mathcal{POI}_n$ é isomorfo a um subsemigrupo de $(C * U_1) \times \mathcal{POI}_n$, em que U_1 é o submonóide de $\mathcal{POI}_n$ formado pelo zero e pela identidade de $\mathcal{POI}_n$ e $C*U_1$ é o produto semidirecto associado à restrição de φ a U_1. Tendo em conta que $\boldsymbol{J} \subset \boldsymbol{O}$ (veja-se [22]), o resultado fica demonstrado se provarmos que $C * U_1$ é um semigrupo $\mathcal{J}$-trivial. Tomemos $x \in C$. Suponhamos que $(x, 0)\,\mathcal{R}\,(y, u)$, para certo $(y, u) \in C * U_1$. Então, existem $(a, t), (b, q) \in C * U_1$ tais que $(y, u) = (x, 0)(a, t)$ e $(x, 0) = (y, u)(b, q)$. Se $a = 1$ temos $(y, u) = (x(0.a), 0) = (x, 0)$. Se $a \neq 1$ temos $(y, u) = (x(0.a), 0) = (0, 0)$, donde $(x, 0) = (0, 0)(b, q) = (0, 0) = (y, u)$. Logo $R_{(x,0)} = \{(x, 0)\}$. Por outro lado, suponhamos que $(x, 0)\,\mathcal{L}\,(y, u)$, para certo $(y, u) \in C*U_1$. Então, existem $(a, t), (b, q) \in C * U_1$ tais que $(y, u) = (a, t)(x, 0)$ e $(x, 0) = (b, q)(y, u)$. Logo, $(y, u) = (a(t.x), 0)$, pelo que $u = 0$. Além disso, $y = a(t.x)$ e $x = b(q.y)$. Se $x = 1$ então $q.y = 1$ e portanto $y = 1$, donde $x = y$. Analogamente, se $y = 1$ então $x = y$. Suponhamos que $x \neq 1$ e $y \neq 1$. Se $t \neq 1$ então $y = a(0.x) = a0 = 0$ e $x = b(q.0) = b0 = 0$, donde $x = y$. Analogamente, se $q \neq 1$ então $x = y$. Finalmente, se $t = q = 1$, então $x = by \leq y = ax \leq x$ e, portanto, uma vez mais $x = y$. Assim, em $C * U_1$, temos $L_{(x,0)} = \{(x, 0)\} = R_{(x,0)}$, pelo que $|J_{(x,0)}| = 1$. Seguidamente, consideremos o elemento $(x, 1) \in C * U_1$. Suponhamos que $(x, 1)\,\mathcal{R}\,(y, u)$, para certo $(y, u) \in C * U_1$. Então, existem $(a, t), (b, q) \in C * U_1$ tais que $(y, u) = (x, 1)(a, t)$ e $(x, 1) = (y, u)(b, q)$. Logo, $y = xa$, $x = y(u.b)$ e $1 = uq$. Então, necessariamente, $u = 1$ e $y = xa \leq x = yb \leq y$, pelo que $(y, u) = (x, 1)$. Por outro lado, suponhamos que $(x, 1)\,\mathcal{L}\,(y, u)$, para certo $(y, u) \in C * U_1$. Então, existem $(a, t), (b, q) \in C * U_1$ tais que $(y, u) = (a, t)(x, 1)$ e $(x, 1) = (b, q)(y, u)$. Desta última igualdade resulta de imediato que $u = 1 = q$, pelo que $t = 1$. Portanto, $x = by \leq y = ax \leq x$, donde $(y, u) = (x, 1)$. Por conseguinte, em $C * U_1$, também temos $L_{(x,1)} = \{(x, 1)\} = R_{(x,1)}$, pelo que $|J_{(x,1)}| = 1$. Portanto, $C * U_1$ é $\mathcal{J}$-trivial. ■

Lema 4.2.6. *Para qualquer $S \in \boldsymbol{O}$, o semigrupo S^0 pertence a $\boldsymbol{O}$.*

Demonstração. Seja $S \in \boldsymbol{O}$. Uma vez que $\boldsymbol{O}$ é a classe de todos os divisores de $\mathcal{O}_k$, com $k \in \mathbb{N}$, existem $m \in \mathbb{N}$, um subsemigrupo T de $\mathcal{O}_m$ e um homomorfismo sobrejectivo φ de T sobre S. É claro que φ induz um homomorfismo sobrejectivo de T^0 sobre S^0. Logo, o resultado fica demonstrado se provarmos que T^0 é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de $\mathcal{O}_{m+1}$. Definimos então uma aplicação ψ de T^0 em $\mathcal{O}_{m+1}$ do seguinte modo: para qualquer $t \in T$,

$$(x)t\psi = \begin{cases} xt, & \text{se } 1 \leq x \leq m \\ m+1, & \text{se } x = m+1, \end{cases}$$

e $(x)0\psi = m+1$, para qualquer $x \in \{1, \ldots, m+1\}$. Então ψ é um homomorfismo injectivo, pelo que o lema fica demonstrado. ∎

Estamos agora em condições de provar o Teorema 4.2.1.

Demonstração do Teorema 4.2.1.

Sejam $n \in \mathbb{N}$, C uma cadeia, $\varphi : \mathcal{POI}_n \to \mathrm{End}^r(C)$ um homomorfismo de monóides e $C * \mathcal{POI}_n$ o produto semidirecto associado a φ. Provamos que $C * \mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$, por indução no número de elementos de C. Se C é uma cadeia com um só elemento, então $C * \mathcal{POI}_n$ é isomorfo a $\mathcal{POI}_n$, donde $C * \mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$. Dada uma cadeia C, suponhamos então que qualquer produto semidirecto $C' * \mathcal{POI}_n$, com C' uma cadeia tal que $|C'| < |C|$, pertence a $\boldsymbol{O}$. Se $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0\}$ ou $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{1\}$ então, pelos Lemas 4.2.3 e 4.2.4, temos $C * \mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$. Se $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0, 1\}$ e $(x)0\varphi = 0$, para qualquer $x \in C \setminus \{1\}$, então $C * \mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$, atendendo ao Lema 4.2.5. Se $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0, 1\}$ e $(x)0\varphi = 1$, para certo $x \in C \setminus \{1\}$, então 0φ aplica pelo menos dois elementos distintos de C na identidade. Logo, pelo Lema 1.6.2, existem duas subcadeias C_1 e C_2 de C, com $1 < |C_i| < |C|$, para $i = 1, 2$, tais que $C * \mathcal{POI}_n$ é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de $(C_1 * \mathcal{POI}_n) \times (C_2 * \mathcal{POI}_n)^0$, para certos produtos semidirectos $C_1 * \mathcal{POI}_n$ e $C_2 * \mathcal{POI}_n$. Atendendo à hipótese de indução, $C_1 * \mathcal{POI}_n, C_2 * \mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$ e, pelo Lema 4.2.6, $(C_2 * \mathcal{POI}_n)^0 \in \boldsymbol{O}$, donde, também neste caso, $C * \mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$. Finalmente, suponhamos que $\mathrm{Im}(0\varphi)$ não verifica nenhum dos casos anteriores. Então, existe $e \in C \setminus \{0, 1\}$ tal que $e \in \mathrm{Im}(0\varphi)$. Como 0φ é um idempotente de $\mathrm{End}(C)$, então $e = (e)0\varphi$. Logo, pelo Lema 1.6.3, existem duas subcadeias C_1 e C_2 de C, com $1 < |C_i| < |C|$, para $i = 1, 2$, tais que $C * \mathcal{POI}_n$ é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de $(C_1 * \mathcal{POI}_n) \times (C_2 * \mathcal{POI}_n)$, para certos produtos semidirectos $C_1 * \mathcal{POI}_n$ e $C_2 * \mathcal{POI}_n$. Mais uma vez, atendendo à hipótese de indução, $C_1 * \mathcal{POI}_n, C_2 * \mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$, pelo que $C * \mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$, como queríamos demonstrar.

3. Semigrupos normalmente ordenados

Nesta secção introduzimos o conceito de *semigrupo normalmente ordenado.* Esta classe de semigrupos surgiu no decorrer de uma tentativa de encontrar uma descrição (*efectiva*) para a pseudovariedade de semigrupos $\boldsymbol{POI}$. Apesar deste problema permanecer em aberto, pensamos que a classe dos semigrupos aperiódicos normalmente ordenados é uma séria candidata à descrição da pseudovariedade $\boldsymbol{POI}$. Além disso, provamos no próximo capítulo que a pseudovariedade de semigrupos inversos gerada por $\{\mathcal{POI}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é a classe dos semigrupos inversos aperiódicos normalmente ordenados.

Nesta secção todos os semigrupos que consideramos são finitos.

Sejam S um semigrupo cujos idempotentes comutam, E o conjunto dos seus idempotentes e

$$\begin{array}{rccccc} \delta: & S & \to & \mathcal{I}(E) & & \\ & s & \mapsto & \delta_s: & \mathcal{R}(s) & \to & \mathcal{L}(s) \\ & & & & e & \mapsto & (es)^{-1}(es) \end{array}$$

a Representação de Munn de S. Dizemos que uma relação de ordem parcial $\trianglelefteq$ definida no conjunto E é uma *ordem normal* em E se verifica as três condições seguintes:

(NO1) Para quaisquer $e, f \in E$, se $e \trianglelefteq f$ então $e \mathcal{J} f$;

(NO2) Para qualquer $\mathcal{J}$-classe regular J de S, $(J \cap E, \trianglelefteq)$ é uma cadeia;

(NO3) Para quaisquer $s \in S$ e $e, f \in \mathcal{R}(s)$, se $e \trianglelefteq f$ então $e\delta_s \trianglelefteq f\delta_s$.

Dizemos que um semigrupo S cujos idempotentes comutam é *normalmente ordenado* se $E(S)$ possui uma ordem normal.

Observemos que, dado um semigrupo S, existe sempre uma relação de ordem parcial $\trianglelefteq$ em $E(S)$ que satisfaz as condições (NO1) e (NO2).

Dados $S \in \boldsymbol{Ecom}$, uma relação de ordem parcial $\trianglelefteq$ em $E = E(S)$ e $s \in \operatorname{Reg}(S)$, atendendo ao Lema 1.5.6, afirmar que, para quaisquer $e, f \in \mathcal{R}(s)$, se $e \trianglelefteq f$ então $e\delta_s \trianglelefteq f\delta_s$, é equivalente a dizer que, para quaisquer $e, f \in Ess^{-1}$, se $e \trianglelefteq f$ então $s^{-1}es \trianglelefteq s^{-1}fs$. Em particular, dado um semigrupo inverso S, uma relação de ordem parcial $\trianglelefteq$ é uma ordem normal em $E = E(S)$ se e só se:

(NO1) Para quaisquer $e, f \in E$, se $e \trianglelefteq f$ então $e \mathcal{J} f$;

(NO2) Para qualquer $J \in S/\mathcal{J}$, $(J \cap E, \trianglelefteq)$ é uma cadeia;

(NO3) Para quaisquer $s \in S$ e $e, f \in Ess^{-1}$, se $e \trianglelefteq f$ então $s^{-1}es \trianglelefteq s^{-1}fs$.

Apresentamos em seguida alguns exemplos de semigrupos normalmente ordenados.

Exemplos 4.3.1. 1. Qualquer semigrupo com um só idempotente é, trivialmente, um semigrupo normalmente ordenado. Assim, os semigrupos *cíclicos* (i.e. os semigrupos que admitem um conjunto de geradores com um só elemento), os semigrupos *nilpotentes* (i.e. os semigrupos com zero em que qualquer elemento possui uma potência nula), em particular os semigrupos *nulos*, e os grupos são exemplos de semigrupos normalmente ordenados.

2. Qualquer semigrupo inverso 0-simples (semigrupo de Brandt) S é normalmente ordenado. Com efeito, qualquer relação de ordem parcial $\trianglelefteq$ definida em $E(S)$ que satisfaça as condições (NO1) e (NO2) também satisfaz a condição (NO3). De facto, tomando $s \in S$ e $e, f \in Ess^{-1}$ tais que $e \trianglelefteq f$, temos $e \mathcal{J} f$, atendendo a (NO1). Assim, $e = 0 = f$ ou, pelo contrário, $e, f \neq 0$. No primeiro caso é claro que $s^{-1}es = s^{-1}fs = 0$. Por outro lado, se $e, f \neq 0$, como $e, f \leq ss^{-1}$, então e, f e ss^{-1} estão $\mathcal{J}$-relacionados e, atendendo à Proposição 1.3.12, de $e, f \leq ss^{-1}$ resulta que $e = ss^{-1} = f$. Por conseguinte, $s^{-1}es = s^{-1}fs$.

3. Qualquer semireticulado E é um semigrupo inverso normalmente ordenado, atendendo a que a igualdade é trivialmente uma ordem normal em E. Mais geralmente, qualquer semigrupo $\mathcal{J}$-trivial cujos idempotentes comutam é normalmente ordenado.

4. O semigrupo inverso $\mathcal{I}_2$ não é normalmente ordenado. Com efeito, suponhamos que existe uma ordem normal $\trianglelefteq$ em $E = E(\mathcal{I}_2)$ e tomemos $s = \binom{1\ 2}{2\ 1}$, $e = \binom{1}{1}$ e $f = \binom{2}{2}$. Então $e \mathcal{J} f$. Por (NO2), temos $e \trianglelefteq f$ ou $f \trianglelefteq e$, mas $e, f \in Ess^{-1}$, $s^{-1}es = f$ e $s^{-1}fs = e$, pelo que, por (NO3), $f \trianglelefteq e$ ou $e \trianglelefteq f$, respectivamente. Portanto, atendendo a (NO2), $e = f$, o que é um absurdo.

Acabámos de mostrar que algumas classes importantes de semigrupos são exemplos de semigrupos normalmente ordenados. No entanto, a nossa motivação para a definição de ordem normal reside no exemplo dado pela próxima proposição. Recordemos o conceito de ordem lexicográfica. Sejam $(C_1, \leq_1), \dots, (C_n, \leq_n)$ n cadeias. No conjunto $C = C_1 \times \cdots \times C_n$ consideramos a relação $\leq_{\text{lex}}$ definida do seguinte modo: para quaisquer $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ em C, $x \leq_{\text{lex}} y$ se e só se $x = y$ ou $x_i = y_i$, para qualquer $i \in \{1, \dots, p-1\}$, e $x_p <_p y_p$, para algum $p \in \{1, \dots, n\}$. A relação $\leq_{\text{lex}}$ é uma ordem linear (ou *total*, segundo outros autores) em C, denominada *ordem lexicográfica* de C.

Proposição 4.3.1. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o semigrupo inverso $\mathcal{POI}_n$ é normalmente ordenado.*

Demonstração. Seja $E = E(\mathcal{POI}_n)$. Dado $e \in E$ tal que $\mathrm{Dom}(e) = \{i_1, \cdots, i_k\}$, em que $i_1 < \cdots < i_k$ e $1 \leq k \leq n$, identifiquemos $\mathrm{Dom}(e)$ com a sequência $(i_1, \ldots, i_k)$. Denotando por $\leq_{\mathrm{lex}}$ a ordem lexicográfica numa potência finita de X_n, definimos uma relação binária $\trianglelefteq$ em E da seguinte forma: para quaisquer $e, f \in E$,

$$e \trianglelefteq f \text{ se e só se } e \,\mathcal{J}\, f \text{ e } \mathrm{Dom}(e) \leq_{\mathrm{lex}} \mathrm{Dom}(f).$$

Recordemos que dois elementos de $\mathcal{POI}_n$ estão $\mathcal{J}$-relacionados se e só se tiverem a mesma característica, pelo que a definição anterior faz sentido. Seguidamente, mostramos que $\trianglelefteq$ é uma ordem normal em E. Atendendo à definição, é claro que $\trianglelefteq$ satisfaz a condição (NO1). Como $\leq_{\mathrm{lex}}$ é uma ordem total e, para quaisquer $e, f \in E$, $\mathrm{Dom}(e) = \mathrm{Dom}(f)$ implica $e = f$, temos que a condição (NO2) também é satisfeita por $\trianglelefteq$. Com a intenção de mostrar que $\trianglelefteq$ satisfaz (NO3), tomemos $s \in \mathcal{POI}_n$ e $e, f \in Ess^{-1}$ tais que $e \trianglelefteq f$. Comecemos por observar que, atendendo a que $e, f \in Ess^{-1}$, então $s^{-1}es \,\mathcal{J}\, s^{-1}fs$. Se $e = 0$ ou $f = 0$ então $e = 0 = f$ e, consequentemente, $s^{-1}es = 0 \trianglelefteq 0 = s^{-1}fs$. Suponhamos que $e, f \neq 0$. Provamos em primeiro lugar que $\mathrm{Dom}(e)s = \mathrm{Dom}(s^{-1}es)$. Uma vez que $e \leq ss^{-1}$, então $\mathrm{Dom}(e) \subseteq \mathrm{Dom}(ss^{-1}) = \mathrm{Dom}(s)$. Seja $i \in \mathrm{Dom}(e)$. Então $is \in \mathrm{Dom}(s^{-1})$, $(is)s^{-1} = i \in \mathrm{Dom}(e)$ e $(is)s^{-1}e = ie = i \in \mathrm{Dom}(s)$, pelo que $is \in \mathrm{Dom}(s^{-1}es)$. Reciprocamente, se $i \in \mathrm{Dom}(s^{-1}es)$ então $is^{-1} \in \mathrm{Dom}(e)$ e portanto $i = (is^{-1})s \in \mathrm{Dom}(e)s$. Analogamente, $\mathrm{Dom}(f)s = \mathrm{Dom}(s^{-1}fs)$. Por outro lado, como s é uma transformação injectiva e crescente, de $\mathrm{Dom}(e) \leq_{\mathrm{lex}} \mathrm{Dom}(f)$ resulta $\mathrm{Dom}(e)s \leq_{\mathrm{lex}} \mathrm{Dom}(f)s$, ou seja $\mathrm{Dom}(s^{-1}es) \leq_{\mathrm{lex}} \mathrm{Dom}(s^{-1}fs)$. Deste modo fica demonstrado que $s^{-1}es \trianglelefteq s^{-1}fs$ e, por conseguinte, o resultado. ∎

Exemplo 4.3.2. Para $n = 3$, temos $|E(\mathcal{POI}_3)| = 8$ e a relação binária $\trianglelefteq$ definida em $E(\mathcal{POI}_3)$ como na proposição anterior, é tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \trianglelefteq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \trianglelefteq \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \trianglelefteq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \trianglelefteq \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Como ficou provado na demonstração do resultado anterior, $\trianglelefteq$ é uma ordem normal em $E(\mathcal{POI}_3)$.

Denotamos por ***NOS*** a classe de todos os semigrupos normalmente ordenados. Nesta secção, o nosso objectivo principal é mostrar que ***NOS*** é uma pseudovariedade de semigrupos. Para provar que ***NOS*** é fechada para imagens homomorfas, precisamos usar o lema que se segue.

Lema 4.3.2. *Sejam S e T dois semigrupos cujos idempotentes comutam e $\varphi : S \to T$ um homomorfismo sobrejectivo. Sejam J' uma $\mathcal{J}$-classe regular de T e J a $\mathcal{J}$-classe de S $\leq_{\mathcal{J}}$-mínima entre as $\mathcal{J}$-classes Q de S tais que $Q\varphi \subseteq J'$. Então φ induz uma bijecção de $J \cap E(S)$ sobre $J' \cap E(T)$.*

Demonstração. Comecemos por observar que a existência de J está garantida pelo Lema 1.3.3, tendo-se ainda que J é regular e $J\varphi = J'$. Seja $e' \in J' \cap E(T)$ e tomemos $x \in J$ tal que $x\varphi = e'$. Seja e uma potência idempotente de x. Então $e\varphi = e'$ e $J_e\varphi \subseteq J'$. Atendendo à minimalidade de J, temos $J \leq_{\mathcal{J}} J_e$. Por outro lado, $J_e \leq_{\mathcal{J}} J_x = J$, e por conseguinte $J_e = J$. Portanto, $e \in J \cap E(S)$. Logo $J' \cap E(T) \subseteq (J \cap E(S))\varphi$. Uma vez que a inclusão recíproca é imediata, concluímos que $(J \cap E(S))\varphi = J' \cap E(T)$. Com a intenção de mostrar que φ é injectiva em $J \cap E(S)$, tomemos $e, f \in J \cap E(S)$ tais que $e\varphi = f\varphi = e'$. Então $(ef)\varphi = e'$, pelo que, atendendo uma vez mais à minimalidade de J, podemos afirmar que $J \leq_{\mathcal{J}} J_{ef} \leq_{\mathcal{J}} J_e = J$. Assim $ef \in J$. Como $e, f, ef \in J$, pela Proposição 1.3.6, obtemos $ef \in R_e \cap L_f$. Atendendo a que os idempotentes de S comutam, concluímos que $e = ef = f$. Portanto, φ é injectiva em $J \cap E(S)$. Logo, φ induz uma bijecção de $J \cap E(S)$ sobre $J' \cap E(T)$, como pretendíamos demonstrar. ■

Proposição 4.3.3. *Qualquer imagem homomorfa de um semigrupo normalmente ordenado é ainda um semigrupo normalmente ordenado.*

Demonstração. Sejam S e T dois semigrupos cujos idempotentes comutam e seja $\varphi : S \to T$ um homomorfismo sobrejectivo. Suponhamos que S é normalmente ordenado e seja $\trianglelefteq$ uma ordem normal em $E(S)$. Para cada $\mathcal{J}$-classe regular J' de T, denotemos por J a $\mathcal{J}$-classe $\leq_{\mathcal{J}}$-mínima de S tal que $J\varphi \subseteq J'$ e, para cada $e' \in E(T)$, denotemos por e o idempotente de S tal que $e\varphi = e'$ e J_e é a $\mathcal{J}$-classe $\leq_{\mathcal{J}}$-mínima de S tal que $J_e\varphi \subseteq J_{e'}$. Definimos uma relação binária $\trianglelefteq'$ em $E(T)$ da seguinte forma: para quaisquer $e', f' \in E(T)$,

$$e' \trianglelefteq' f' \text{ se e só se } e \trianglelefteq f.$$

O resultado fica demonstrado provando que $\trianglelefteq'$ é uma ordem normal em $E(T)$.

(NO1) Sejam $e', f' \in E(T)$ tais que $e' \trianglelefteq' f'$. Então $e \trianglelefteq f$, pelo que $e \mathcal{J} f$, donde $e' = e\varphi \,\mathcal{J}\, f\varphi = f'$.

(NO2) Sejam J' uma $\mathcal{J}$-classe regular de T e $e', f' \in J' \cap E(T)$. Então $e, f \in J \cap E(S)$ e, uma vez que $(J \cap E(S), \trianglelefteq)$ é uma cadeia, $e \trianglelefteq f$ ou $f \trianglelefteq e$. Logo $e' \trianglelefteq' f'$ ou $f' \trianglelefteq' e'$. Por outro lado, atendendo a que $\trianglelefteq$ é uma relação de ordem parcial e $\mathcal{J}$ é uma relação de equivalência, temos que $\trianglelefteq'$ é uma relação de ordem parcial em $J' \cap E(T)$, pelo que $(J' \cap E(T), \trianglelefteq')$ é também uma cadeia.

(NO3) Seja $t \in T$ e tomemos $e', f' \in E(T)$ tais que $e', f' \in \mathcal{R}(t)$ e $e' \trianglelefteq' f'$. Queremos então provar que $(e't)^{-1}(e't) \trianglelefteq' (f't)^{-1}(f't)$. Se $e' = f'$, a condição anterior é trivialmente verdadeira, pelo que podemos supor que $e' \neq f'$. Então, $e', f' \neq t$. Com efeito, se $e' = t$ então $f' \in \mathcal{R}(e')$, pelo que, atendendo ao Lema 1.5.2, obtemos

$$f' = e'(f'e')^{-1}f' = e'f',$$

donde $f' \leq e'$ e, pela Proposição 1.3.12, temos $e' = f'$. De um modo análogo se prova que f' é distinto de t. Seja J' a $\mathcal{J}$-classe de T que contém os idempotentes e' e f'. Seja $s \in t\varphi^{-1}$. Então, $(es)\varphi = e't$. Pelos Lemas 1.5.1 e 1.5.2, $e't$ é regular e $e' \mathcal{J} (e't)^{-1}(e't)$, donde $e't \in J'$. Agora, como $e \in J$ e $es \leq_{\mathcal{J}} e$, obtemos $es \in J$, pois J é a $\mathcal{J}$-classe $\leq_{\mathcal{J}}$-mínima tal que $J\varphi \subseteq J'$. Logo, $es \in \mathrm{Reg}(S)$ e $(es)^{-1}(es) \in J$. Além disso, $(e't)^{-1} = ((es)\varphi)^{-1} = (es)^{-1}\varphi$ e portanto

$$(e't)^{-1}(e't) = (es)^{-1}\varphi(es)\varphi = ((es)^{-1}(es))\varphi.$$

Analogamente, $fs \in \mathrm{Reg}(S)$, $(fs)^{-1}(fs) \in J$ e

$$(f't)^{-1}(f't) = ((fs)^{-1}(fs))\varphi.$$

Por outro lado, uma vez que $e' \in \mathcal{R}(t)$ e $e' \neq t$, então existe $y \in T$ tal que $e' = ty$. Seja $x \in S$ tal que $x\varphi = y$. Então,

$$e\varphi = e' = e'e' = tye' = s\varphi x\varphi e\varphi = (sx)\varphi e\varphi,$$

pelo que

$$e\varphi = (sx)^{\omega}\varphi e\varphi = ((sx)^{\omega}e)\varphi.$$

Além disso, como $(sx)^{\omega}e \in E(S)$, $(sx)^{\omega}e \leq_{\mathcal{J}} e$ e $e \in J$, então $(sx)^{\omega}e \in J$, atendendo à minimalidade de J. Logo, pelo Lema 1.3.12, temos $e = (sx)^{\omega}e$, donde $e \leq_{\mathcal{R}} s$. Analogamente, $f \leq_{\mathcal{R}} s$. Portanto, temos $e, f \in \mathcal{R}(s)$ e $e \trianglelefteq f$, donde

$$(es)^{-1}(es) \trianglelefteq (fs)^{-1}(fs).$$

Consequentemente, $((es)^{-1}(es))\varphi \trianglelefteq' ((fs)^{-1}(fs))\varphi$, i.e.

$$(e't)^{-1}(e't) \trianglelefteq' (f't)^{-1}(f't),$$

como queríamos demonstrar. ∎

Teorema 4.3.4. *A classe **NOS** é uma pseudovariedade de semigrupos.*

Demonstração. Atendendo à Proposição 4.3.3, a classe $\boldsymbol{NOS}$ é fechada para imagens homomorfas. Logo, para provar que $\boldsymbol{NOS}$ é uma pseudovariedade de semigrupos, falta ver que também é fechada para subsemigrupos e produtos directos finitos.

Sejam $S \in \boldsymbol{NOS}$, $\trianglelefteq$ uma ordem normal em $E(S)$ e T um subsemigrupo de S. Consideremos a relação $\trianglelefteq'$ definida em $E(T)$ por: dados $e, f \in E(T)$, $e \trianglelefteq' f$ se e só se e e f são idempotentes $\mathcal{J}$-relacionados em T e $e \trianglelefteq f$. Então $\trianglelefteq'$ é uma ordem normal em $E(T)$, pelo que $T \in \boldsymbol{NOS}$.

Tomemos agora n semigrupos normalmente ordenados $S_1, \ldots, S_n$ e denotemos por $\trianglelefteq_i$ a ordem normal considerada em cada $E(S_i)$, com $1 \leq i \leq n$. Seja $S = S_1 \times \cdots \times S_n$. Então, dada uma $\mathcal{J}$-classe regular J de S, J é um produto directo $J_1 \times \cdots \times J_n$ de $\mathcal{J}$-classes regulares J_i de S_i, $1 \leq i \leq n$, e $J \cap E(S)$ é o produto directo dos conjuntos $J_i \cap E(S_i)$, com $1 \leq i \leq n$. Como cada $J_i \cap E(S_i)$, $1 \leq i \leq n$, é uma cadeia para a ordem $\trianglelefteq_i$, podemos considerar a ordem lexicográfica $\leq_{\text{lex}}$ em $J \cap E(S)$ induzida pelas ordens normais $\trianglelefteq_i$, $1 \leq i \leq n$. Definimos agora uma relação binária $\trianglelefteq$ em $E(S)$ da seguinte forma: para quaisquer $e, f \in E(S)$,

$$e \trianglelefteq f \text{ se e só se } e \,\mathcal{J}\, f \text{ e } e \leq_{\text{lex}} f.$$

É evidente que $\trianglelefteq$ satisfaz as condições (NO1) e (NO2). Com o objectivo de provar que $\trianglelefteq$ satisfaz a condição (NO3), tomemos $s \in S$ e $e, f \in \mathcal{R}(s)$ tais que $e \trianglelefteq f$. Se $e = f$ então $(es)^{-1}(es) = (fs)^{-1}(fs)$, pelo que, trivialmente, $(es)^{-1}(es) \trianglelefteq (fs)^{-1}(fs)$. Suponhamos que $e \neq f$. Sejam $s_i, e_i, f_i \in S_i$, com $i \in \{1, \ldots, n\}$, tais que $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ e $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Então, $e_i \,\mathcal{J}\, f_i$ e $e_i, f_i \in \mathcal{R}(s_i)$, para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$. Além disso, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $e_j \trianglelefteq_j f_j$, $e_j \neq f_j$ e $e_i = f_i$, para $1 \leq i < j$. Logo, $(e_j s_j)^{-1}(e_j s_j) \trianglelefteq_j (f_j s_j)^{-1}(f_j s_j)$, $(e_j s_j)^{-1}(e_j s_j) \neq (f_j s_j)^{-1}(f_j s_j)$ e $(e_i s_i)^{-1}(e_i s_i) = (f_i s_i)^{-1}(f_i s_i)$, para $1 \leq i < j$. Uma vez que

$$(es)^{-1}(es) = ((e_1 s_1)^{-1}(e_1 s_1), \ldots, (e_n s_n)^{-1}(e_n s_n))$$

e

$$(fs)^{-1}(fs) = ((f_1 s_1)^{-1}(f_1 s_1), \ldots, (f_n s_n)^{-1}(f_n s_n)),$$

temos $(es)^{-1}(es) \trianglelefteq (fs)^{-1}(fs)$. Logo, $\trianglelefteq$ satisfaz a condição (NO3), pelo que o semigrupo S pertence a $\boldsymbol{NOS}$. Deste modo fica demonstrado o resultado. ■

Uma vez que $\mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{NOS}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, e $\boldsymbol{NOS}$ é uma pseudovariedade de semigrupos, podemos afirmar que $\boldsymbol{POI} \subseteq \boldsymbol{NOS}$. Por outro lado, mostramos no capítulo 5 que $\boldsymbol{POI} \cap \boldsymbol{Inv} = \boldsymbol{NOS} \cap \boldsymbol{Inv} \cap \boldsymbol{A}$. Nesta contexto, julgamos ser lícito conjecturar que $\boldsymbol{POI} = \boldsymbol{NOS} \cap \boldsymbol{A}$. A descrição (*efectiva*) de $\boldsymbol{POI}$ constitui um problema que permanece em aberto.

Designemos por $\boldsymbol{NO}$ a classe dos semigrupos inversos normalmente ordenados. Como consequência imediata do teorema anterior, temos:

Corolário 4.3.5. *A classe $\boldsymbol{NO}$ é uma pseudovariedade de semigrupos inversos.* ■

O resultado seguinte estabelece uma propriedade importante da pseudovariedade de semigrupos $\boldsymbol{NOS}$ que, como mostramos adiante, nos permitirá reduzir o estudo da pseudovariedade de semigrupos inversos $\boldsymbol{NO}$ ao estudo dos seus elementos fundamentais.

Proposição 4.3.6. *Sejam S e T dois semigrupos cujos idempotentes comutam e seja $\theta : S \to T$ um homomorfismo sobrejectivo cujo núcleo é uma congruência de S que separa idempotentes. Então, $S \in \boldsymbol{NOS}$ se e só se $T \in \boldsymbol{NOS}$.*

Demonstração. Se $S \in \boldsymbol{NOS}$ então, pela Proposição 4.3.3, $T \in \boldsymbol{NOS}$. Reciprocamente, suponhamos que $T \in \boldsymbol{NOS}$ e seja $\trianglelefteq'$ uma ordem normal em $E(T)$. Definimos uma relação $\trianglelefteq$ em $E(S)$ da seguinte forma:

$$e \trianglelefteq f \text{ se e só se } e\theta \trianglelefteq' f\theta,$$

para quaisquer $e, f \in E(S)$. Mostramos que $\trianglelefteq$ é uma ordem normal em $E(S)$. Comecemos por observar que, como θ é um homomorfismo que separa idempotentes, então θ induz uma bijecção de $E(S)$ sobre $E(T)$. Logo, tendo em conta o Lema 1.3.3, a imagem inversa por θ de uma $\mathcal{J}$-classe regular de T contém exactamente uma $\mathcal{J}$-classe regular de S. Assim, é imediato que $\trianglelefteq$ verifica a condição (NO1). Além disso, temos que $\trianglelefteq$ também verifica (NO2). Por outro lado, atendendo simplesmente a que θ é um homomorfismo, então a relação $\trianglelefteq$ verifica a condição (NO3). Com efeito, tomemos $s \in S$ e $e, f \in \mathcal{R}(s)$ tais que $e \trianglelefteq f$. Então $e\theta, f\theta \in \mathcal{R}(s\theta)$ e, por definição, $e\theta \trianglelefteq' f\theta$. Consequentemente, $(e\theta s\theta)^{-1}(e\theta s\theta) \trianglelefteq' (f\theta s\theta)^{-1}(f\theta s\theta)$, ou seja, $((es)^{-1}(es))\theta \trianglelefteq' ((fs)^{-1}(fs))\theta$, uma vez que $es, fs \in \mathrm{Reg}(S)$. Logo, por definição de $\trianglelefteq$, obtemos $(es)^{-1}(es) \trianglelefteq (fs)^{-1}(fs)$, como queríamos demonstrar. ■

Como corolário imediato da proposição anterior temos:

Corolário 4.3.7. *Se S é um semigrupo cujos idempotentes comutam e μ é a maior congruência que separa idempotentes em S, então $S \in \boldsymbol{NOS}$ se e só se $S/\mu \in \boldsymbol{NOS}$.* ■

Mostramos em seguida que as transformações parciais injectivas envolvidas na Representação de Munn de um semigrupo normalmente ordenado são transformações crescentes para uma ordem linear conveniente.

Lema 4.3.8. *Sejam S um semigrupo normalmente ordenado e $E = E(S)$. Então existe uma extensão linear $\trianglelefteq'$ da ordem normal $\trianglelefteq$ em $E(S)$ tal que, para qualquer $s \in S$, a aplicação δ_s é uma transformação parcial crescente sobre a cadeia $(E, \trianglelefteq')$.*

Demonstração. Seja $\leq'$ uma extensão linear da ordem parcial $\leq_{\mathcal{J}}$ definida em $S/\mathcal{J}$. Estendemos a ordem normal $\trianglelefteq$ em E, definindo uma relação $\trianglelefteq'$ em E da seguinte forma: para quaisquer $e, f \in E$, $e \trianglelefteq' f$ se e só se $e \trianglelefteq f$ ou $J_e <' J_f$.

Primeiramente, provamos que $\trianglelefteq'$ é uma extensão linear de $\trianglelefteq$. É claro que a relação $\trianglelefteq'$ estende $\trianglelefteq$. Além disso $\trianglelefteq'$ é reflexiva e anti-simétrica. Para mostrarmos que $\trianglelefteq'$ é transitiva, tomemos $e, f, g \in E$ tais que $e \trianglelefteq' f$ e $f \trianglelefteq' g$. Se $e \trianglelefteq f$ e $f \trianglelefteq g$ então $e \trianglelefteq g$ e portanto $e \trianglelefteq' g$. Se $e \trianglelefteq f$ e $J_f <' J_g$ então $J_e = J_f <' J_g$, pelo que $e \trianglelefteq' g$. Se $J_e <' J_f$ e $f \trianglelefteq g$ então $J_e <' J_f = J_g$, donde $e \trianglelefteq' g$. Finalmente, se $J_e <' J_f$ e $J_f <' J_g$ então $J_e <' J_g$ e portanto $e \trianglelefteq' g$. Logo, $\trianglelefteq'$ é uma ordem parcial. Mostramos em seguida que quaisquer dois elementos de E estão $\trianglelefteq'$-relacionados. Tomemos $e, f \in E$. Como $(S/\mathcal{J}, \leq')$ é uma cadeia, $J_e = J_f$, $J_e <' J_f$ ou $J_f <' J_e$. Se $J_e <' J_f$ ou $J_f <' J_e$ então, atendendo à definição de $\trianglelefteq'$, temos $e \trianglelefteq' f$ ou $f \trianglelefteq' e$, respectivamente. Se $J_e = J_f$, como $(J_e \cap E, \trianglelefteq)$ é uma cadeia, temos $e \trianglelefteq f$ ou $f \trianglelefteq e$, pelo que, também neste caso, $e \trianglelefteq' f$ ou $f \trianglelefteq' e$.

Por último, provamos que, para qualquer $s \in S$, a aplicação δ_s é uma transformação parcial crescente sobre a cadeia $(E, \trianglelefteq')$. Sejam $s \in S$ e $e, f \in \mathcal{R}(s)$ tais que $e \trianglelefteq' f$. Se $e \trianglelefteq f$ então $e\delta_s = (es)^{-1}(es) \trianglelefteq (fs)^{-1}(fs) = f\delta_s$, donde $e\delta_s \trianglelefteq' f\delta_s$. Por outro lado, se $J_e <' J_f$, como $J_{e\delta_s} = J_e$ e $J_{f\delta_s} = J_f$, então $J_{e\delta_s} <' J_{f\delta_s}$, pelo que $e\delta_s \trianglelefteq' f\delta_s$. ∎

Estamos agora em condições de demonstrar o seguinte teorema de representação para semigrupos normalmente ordenados E-fundamentais.

Teorema 4.3.9. *Sejam S um semigrupo normalmente ordenado E-fundamental, $E = E(S)$ e $n = |E|$. Então S é isomorfo a um subsemigrupo de $\mathcal{POI}_n$.*

Demonstração. Uma vez que S é um semigrupo normalmente ordenado, o Lema 4.3.8 garante-nos a existência de uma extensão linear $\trianglelefteq'$ da ordem normal $\trianglelefteq$ de E tal que, para qualquer $s \in S$, δ_s é uma transformação parcial (injectiva) crescente sobre a cadeia $(E, \trianglelefteq')$. Atendendo a que $(E, \trianglelefteq')$ tem n elementos, podemos considerar o monóide $\mathcal{POI}_n$ construído a partir desta cadeia e assumir δ_s como um elemento de $\mathcal{POI}_n$, para qualquer $s \in S$. Temos assim um homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \delta: & S & \rightarrow & \mathcal{POI}_n \\ & s & \mapsto & \delta_s. \end{array}$$

O resultado fica demonstrado observando que, como S é E-fundamental, o homomorfismo anterior é injectivo (veja-se o Teorema 1.5.5). ∎

Como consequência imediata do teorema anterior temos:

Corolário 4.3.10. *Todo o semigrupo normalmente ordenado E-fundamental pertence à pseudovariedade **POI**.* ∎

Já observámos atrás que ***POI*** é uma subpseudovariedade de ***NOS***. Por outro lado, o resultado anterior dá-nos uma condição suficiente para que um semigrupo normalmente ordenado pertença à pseudovariedade ***POI***. No entanto, esta não é uma condição necessária, como prova o exemplo que a seguir apresentamos.

Exemplo 4.3.3. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e S um semigrupo nulo com $n+1$ elementos. De acordo com o Exemplo 1 de 4.3.1, temos que $S \in$ ***NOS***. Além disso, $S \in$ ***POI***, pois S é isomorfo a um subsemigrupo de $\mathcal{POI}_{n+1}$. Com efeito, supondo que $S = \{0, s_1, \ldots, s_n\}$, a aplicação de S em $\mathcal{POI}_{n+1}$ que transforma 0 em 0 e s_i em $\binom{n+1}{i}$, com $i \in \{1, \ldots, n\}$, é um homomorfismo injectivo. Por outro lado, como S não possui outro idempotente além do zero, então o núcleo da Representação de Munn de S é a congruência universal. Logo, tendo em conta que $|S| \geq 2$, o semigrupo S não é E-fundamental.

O exemplo anterior mostra que nem todo o elemento de ***POI*** é um semigrupo E-fundamental, mas provamos, no capítulo 5, que um semigrupo inverso pertence à pseudovariedade ***POI*** se e só se pertence a ***NOS*** e é E-fundamental. Apresentamos, também no próximo capítulo, um semigrupo aperiódico inverso (donde, em particular, E-fundamental) que não pertence a ***NOS***.

Capítulo 5

Semigrupos Inversos Normalmente Ordenados

Neste capítulo, consideramos apenas semigrupos inversos finitos e temos por objectivo principal o estudo da pseudovariedade $\boldsymbol{NO}$ dos semigrupos inversos normalmente ordenados. Na secção 1, estudamos os semigrupos inversos normalmente ordenados que são fundamentais. Mostramos que estes semigrupos são exactamente os semigrupos aperiódicos de $\boldsymbol{NO}$, o que nos conduz a uma descrição da pseudovariedade de semigrupos inversos gerada pelos semigrupos $\mathcal{POI}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ainda na primeira secção, exibimos um semigrupo de cardinalidade mínima entre os semigrupos inversos e aperiódicos que não pertencem a $\boldsymbol{POI}$. Na segunda secção, apresentamos uma classe de geradores para $\boldsymbol{NO}$ constituída por semigrupos de transformações parciais injectivas sobre uma cadeia finita, os quais gozam de uma propriedade que generaliza o conceito de transformação crescente. Finalmente, na terceira e última secção mostramos que o supremo da pseudovariedade de semigrupos inversos $\boldsymbol{POI} \cap \boldsymbol{Inv}$ com a pseudovariedade $\boldsymbol{G}$ de todos os grupos finitos coincide com a pseudovariedade $\boldsymbol{NO}$.

1. Semigrupos inversos normalmente ordenados fundamentais

O objectivo genérico deste capítulo é o estudo dos semigrupos inversos normalmente ordenados. Começamos por recordar que um semigrupo inverso S se diz *normalmente ordenado* se no conjunto E dos seus idempotentes está definida uma *ordem normal*, i.e. uma relação de ordem parcial $\trianglelefteq$ que satisfaz as seguintes condições:

(NO1) Para quaisquer $e, f \in E$, se $e \trianglelefteq f$ então $e \mathcal{J} f$;

(NO2) Para qualquer $J \in S/\mathcal{J}$, $(J \cap E, \trianglelefteq)$ é uma cadeia;

(NO3) Para quaisquer $s \in S$ e $e, f \in Ess^{-1}$, se $e \trianglelefteq f$ então $s^{-1}es \trianglelefteq s^{-1}fs$.

No capítulo 4, estabelecemos que a classe $\boldsymbol{NO}$ de todos os semigrupos inversos normalmente ordenados constitui uma pseudovariedade de semigrupos inversos (Corolário 4.3.5). Nesta primeira secção, estudamos os semigrupos inversos normalmente ordenados fundamentais. O estudo desta subclasse da pseudovariedade $\boldsymbol{NO}$ é motivado pelo resultado seguinte, o qual não é mais do que um caso particular do Corolário 4.3.7.

Proposição 5.1.1. *Se S é um semigrupo inverso e μ é a maior congruência que separa idempotentes em S, então $S \in \boldsymbol{NO}$ se e só se $S/\mu \in \boldsymbol{NO}$.* ∎

Uma vez que, para um semigrupo inverso S, a maior congruência μ de S que separa idempotentes é também a maior congruência de S que está contida em $\mathcal{H}$ e o quociente S/μ é um semigrupo fundamental, a proposição anterior permite-nos afirmar que para "conhecer" todos os elementos da pseudovariedade $\boldsymbol{NO}$ é "suficiente" conhecer os seus elementos fundamentais. Assim, neste contexto, faz todo o sentido começar por estudar a subclasse dos semigrupos fundamentais de $\boldsymbol{NO}$.

O facto de o conceito de semigrupo inverso E-fundamental coincidir com o de semigrupo inverso fundamental, permite-nos ainda estabelecer, como caso particular do Teorema 4.3.9, o seguinte teorema de representação para semigrupos inversos fundamentais normalmente ordenados.

Teorema 5.1.2. *Sejam S um semigrupo inverso fundamental normalmente ordenado, $E = E(S)$ e $n = |E|$. Então S é isomorfo a um subsemigrupo de $\mathcal{POI}_n$.* ∎

Atendendo a que os semigrupos $\mathcal{POI}_n$, com $n \in \mathbb{N}$, são aperiódicos, o resultado anterior permite-nos afirmar que os semigrupos fundamentais da pseudovariedade $\boldsymbol{NO}$ são também aperiódicos e, consequentemente, podemos deduzir que a relação de Green $\mathcal{H}$ num semigrupo normalmente ordenado é uma congruência. Com efeito, temos o seguinte corolário:

Corolário 5.1.3. *Seja S um semigrupo inverso normalmente ordenado. Então S é fundamental se e só se é aperiódico. Além disso, $\mathcal{H}$ é a maior congruência de S que separa idempotentes.*

Demonstração. Seja μ a maior congruência de S que separa idempotentes. Uma vez que $\mu \subseteq \mathcal{H}$, é claro que, se S é aperiódico (pelo que $\mathcal{H} = 1$) então S é fundamental.

Reciprocamente, se S é fundamental então, pelo Teorema 5.1.2, S é isomorfo a um subsemigrupo de $\mathcal{POI}_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, pelo que, como $\mathcal{POI}_n$ é um semigrupo aperiódico, S também é aperiódico.

Por outro lado, para provar que $\mathcal{H}$ é a maior congruência de S que separa idempotentes, basta mostrar que $\mathcal{H} \subseteq \mu$, já que a inclusão $\mu \subseteq \mathcal{H}$ é sempre verdadeira. Assim, tomemos $s, t \in S$ tais que $s \,\mathcal{H}\, t$. Então $s\mu \,\mathcal{H}\, t\mu$. Atendendo a que $S/\mu \in \boldsymbol{NO}$ e S/μ é fundamental, concluímos que S/μ é aperiódico, pelo que $s\mu = t\mu$ e portanto $\mathcal{H} \subseteq \mu$. ■

Seja $\boldsymbol{PCS}$ a classe constituída por todos os semigrupos inversos isomorfos a algum subsemigrupo de $\mathcal{POI}_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Esta classe foi considerada por D. Cowan e N. Reilly em [10]. Atendendo a que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o semigrupo $\mathcal{POI}_n$ é inverso normalmente ordenado (Proposição 4.3.1) e a classe $\boldsymbol{NO}$ dos semigrupos inversos normalmente ordenados constitui uma pseudovariedade de semigrupos inversos (Corolário 4.3.5), então $\boldsymbol{PCS} \subseteq \boldsymbol{NO}$. Mais precisamente, temos $\boldsymbol{PCS} \subseteq \boldsymbol{NO} \cap \boldsymbol{A}$, visto que os semigrupos $\mathcal{POI}_n$, $n \in \mathbb{N}$, são aperiódicos. Por outro lado, o Teorema 5.1.2 garante-nos de imediato a veracidade da inclusão recíproca. Assim, em particular, concluímos que a classe $\boldsymbol{PCS}$ é uma pseudovariedade de semigrupos inversos. Podemos então enunciar as seguintes descrições da classe $\boldsymbol{PCS}$:

Teorema 5.1.4. *A classe $\boldsymbol{PCS}$ é a pseudovariedade de semigrupos inversos gerada pelos semigrupos $\mathcal{POI}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $\boldsymbol{PCS} = \boldsymbol{NO} \cap \boldsymbol{A}$ e, dado um semigrupo inverso S tal que $n = |E(S)|$, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$S \in \boldsymbol{PCS}$;*
2. *S é um semigrupo inverso aperiódico normalmente ordenado;*
3. *S é isomorfo a um subsemigrupo de $\mathcal{POI}_n$.* ■

Observemos que a prova original de que a classe $\boldsymbol{PCS}$ é a pseudovariedade de semigrupos inversos gerada pelos semigrupos inversos $\mathcal{POI}_n$, com $n \in \mathbb{N}$, se deve a D. Cowan e N. Reilly [10]. A nossa prova parece-nos no entanto mais simples e mais transparente do que a original.

Tendo em conta (pela Proposição 1.8.2) que $\boldsymbol{POI} \cap \boldsymbol{Inv}$ é a pseudovariedade de semigrupos inversos gerada pelos semigrupos $\mathcal{POI}_n$, com $n \in \mathbb{N}$, então

$$\boldsymbol{POI} \cap \boldsymbol{Inv} = \boldsymbol{PCS}.$$

Além disso, temos:

Corolário 5.1.5. *É possível decidir efectivamente se um dado semigrupo inverso pertence à pseudovariedade de semigrupos* $\boldsymbol{POI}$. ■

Também em [10], D. Cowan e N. Reilly provaram que a pseudovariedade de semigrupos inversos $\boldsymbol{PCS}$ não é finitamente baseada. Na realidade, D. Cowan e N. Reilly estabeleceram o resultado mais geral que a seguir enunciamos. Comecemos por apresentar alguma notação. Para cada $m \geq 3$, definimos a operação implícita (a m variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_m$)

$$w_m = x_1(x_1x_2^{-1})^\omega x_2(x_2x_3^{-1})^\omega \cdots x_{m-1}(x_{m-1}x_m^{-1})^\omega x_m^2 = \left(\prod_{i=1}^{m-1} x_i(x_ix_{i+1}^{-1})^\omega\right) x_m^2$$

e a pseudoidentidade P_m seguinte:

$$w_m^\omega = w_m^\omega x_1.$$

Consideramos ainda, para cada subconjunto infinito I de inteiros positivos superiores ou iguais a 3, a pseudovariedade (de semigrupos inversos) $\boldsymbol{V_I}$ definida pelo conjunto de pseudoidentidades $\{P_m \mid m \in I\}$. Nestas condições, temos [10, Teorema 8.5]:

Teorema 5.1.6. **[D. Cowan & N. Reilly]** *Sejam* $\boldsymbol{U}$ *uma pseudovariedade de semigrupos inversos aperiódicos e* I *um subconjunto infinito de inteiros positivos superiores ou iguais a* 3. *Se* $\boldsymbol{PCS} \subseteq \boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{V_I}$ *então não existe um conjunto de pseudoidentidades que envolva apenas um número finito de variáveis que defina* $\boldsymbol{U}$. *Em particular,* $\boldsymbol{PCS}$ *não é finitamente baseada.* ■

Uma vez que a pseudovariedade $\boldsymbol{A}$ é descrita pela pseudoidentidade $x^{\omega+1} = x^\omega$, a partir da igualdade $\boldsymbol{PCS} = \boldsymbol{NO} \cap \boldsymbol{A}$, podemos estabelecer, de forma imediata, o resultado seguinte:

Corolário 5.1.7. *A pseudovariedade de semigrupos inversos* $\boldsymbol{NO}$ *não é finitamente baseada.* ■

Observemos contudo que, apesar de não ser finitamente baseada, atendendo à definição, a pseudovariedade $\boldsymbol{NO}$ é decidível. Tendo em conta o Teorema 5.1.4, a mesma observação pode ser feita acerca de $\boldsymbol{PCS}$, i.e. a pseudovariedade de semigrupos inversos $\boldsymbol{PCS}$ é decidível e não é finitamente baseada.

Concluímos esta secção exibindo um semigrupo inverso aperiódico, de menor cardinalidade possível, que não pertence à pseudovariedade $\boldsymbol{POI}$.

Exemplo 5.1.1. Seja CS_3 o subsemigrupo inverso de $\mathcal{I}_3$ gerado pelas transformações

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

O semigrupo CS_3 é aperiódico e possui 19 elementos. O diagrama seguinte representa a sua estrutura:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\emptyset$

Provemos que $CS_3 \notin \boldsymbol{POI}$. Suponhamos que existe uma ordem normal em $E(CS_3)$. Sejam $e = \binom{1}{1}$, $f = \binom{2}{2}$, $g = \binom{3}{3}$, $s = \binom{1\,2}{3\,1}$ e $t = \binom{2\,3}{1\,2}$. Então, $e \,\mathcal{J}\, f \,\mathcal{J}\, g$, $e, f \leq ss^{-1}$ e $g, f \leq tt^{-1}$. Se $e \trianglelefteq f$ então $g = s^{-1}es \trianglelefteq s^{-1}fs = e$. Neste caso, obtemos $g \trianglelefteq f$, pelo que $f = t^{-1}gt \trianglelefteq t^{-1}ft = e$ e portanto $e = f$, contra a hipótese. De um modo análogo, podemos concluir que, se $f \trianglelefteq e$ então $e = f$. Logo, CS_3 não é normalmente ordenado e, portanto, pelo Teorema 5.1.4, o semigrupo CS_3 não pertence a $\boldsymbol{POI}$, donde CS_3 não pertence a $\boldsymbol{PCS}$.

Em [10, Exemplo 3.1 e Teorema 3.2], D. Cowan e N. Reilly provaram que CS_3^1 é o único semigrupo inverso que é um *transversal* (i.e. uma classe de representantes) para a relação $\mathcal{H}$ de algum semigrupo inverso simétrico $\mathcal{I}_n$ (neste caso, de $\mathcal{I}_3$) não isomorfo a $\mathcal{POI}_n$.

Observemos ainda que, implicitamente, D. Cowan e N. Reilly também provaram que CS_3^1 (e consequentemente CS_3) não pertence a $\boldsymbol{PCS}$. De facto, uma vez que CS_3^1 é o monóide M_1 definido em [10, secção 7], dos Lemas 7.2 e 7.4 de [10], resulta que $M_1 \notin \boldsymbol{PCS}$.

Antes de passarmos à demonstração de que CS_3 é de facto um semigrupo inverso aperiódico de menor cardinalidade possível que não pertence a $\boldsymbol{PCS}$, apresentamos um resultado que é uma consequência da propriedade da Representação de Munn estabelecida no Lema 1.4.5:

Proposição 5.1.8. *Se S é um semigrupo inverso aperiódico cujas $\mathcal{J}$-classes não maximais possuem no máximo dois idempotentes, então S pertence a $\boldsymbol{PCS}$.*

Demonstração. Sejam $E = E(S)$ e $\trianglelefteq$ uma relação de ordem parcial em E que satisfaz as condições (NO1) e (NO2). Mostremos que $\trianglelefteq$ satisfaz também a condição (NO3). Tomemos $s \in S$ e $e, f \in Ess^{-1}$ tais que $e \trianglelefteq f$. Se $e = f$ então, é claro que, $s^{-1}es \trianglelefteq s^{-1}fs$. Admitamos pois que $e \neq f$. Suponhamos que J_e é uma $\mathcal{J}$-classe maximal. Como $e \leq ss^{-1}$, então $J_e \leq J_{ss^{-1}}$, pelo que $e \,\mathcal{J}\, ss^{-1}$. Logo, pela Proposição 1.3.12, temos $e = ss^{-1}$. Analogamente, obtemos $f = ss^{-1}$. Então $e = f$, contra a hipótese. Portanto, J_e não é maximal e, atendendo à hipótese, e e f são os únicos idempotentes de J_e. Se $s^{-1}es = f$ então $s^{-1}fs = e$, pelo que, atendendo ao Lema 1.4.5, obtemos $e = f$. Por conseguinte, $s^{-1}es = e \trianglelefteq f = s^{-1}fs$. Logo $\trianglelefteq$ satisfaz (NO3), pelo que $S \in \boldsymbol{PCS}$. ∎

Recordemos que, dados um semigrupo inverso S e duas $\mathcal{J}$-classes J_1 e J_2 de S tais que $J_1 <_{\mathcal{J}} J_2$, cada idempotente de J_2 cobre pelo menos um idempotente de J_1 e dois quaisquer idempotentes de J_2 cobrem exactamente o mesmo número de idempotentes de J_1 (Proposição 1.4.4). Estamos agora em condições de provar o resultado pretendido:

Teorema 5.1.9. *O semigrupo CS_3 é um semigrupo inverso aperiódico de cardinalidade mínima entre os semigrupos que não pertencem a $\boldsymbol{PCS}$.*

Demonstração. Já provámos atrás que $|CS_3| = 19$ e $CS_3 \notin \boldsymbol{PCS}$ (Exemplo 5.1.1). Suponhamos que existe um semigrupo inverso aperiódico S tal que $|S| < 19$ e S não pertence a $\boldsymbol{PCS}$. Seja $E = E(S)$. Então E não possui uma ordem normal. Seja

$$\begin{array}{rccc} \delta: & S & \to & \mathcal{I}(E) \\ & s & \mapsto & \delta_s \end{array}$$

a Representação de Munn de S.

Comecemos por observar que a Proposição 5.1.8 nos garante que o semigrupo S possui uma $\mathcal{J}$-classe não maximal J com pelo menos três idempotentes. Uma vez que todo o semigrupo (finito) inverso aperiódico tem um zero e o número de elementos de uma sua qualquer $\mathcal{J}$-classe é igual ao quadrado do número de idempotentes que contém, então J é necessariamente a única $\mathcal{J}$-classe de S com mais de dois idempotentes, já que, caso contrário, temos $|S| \geq 1 + 3^2 + 3^2 = 19$.

Por outro lado, se todas as $\mathcal{J}$-classes de S estritamente acima de J (relativamente a $\leq_{\mathcal{J}}$) possuem apenas um elemento (sendo este necessariamente idempotente), então qualquer relação de ordem parcial $\trianglelefteq$ definida em E satisfazendo (NO1) e (NO2) é uma ordem normal em E. Com efeito, tomemos $s \in S$ e $e, f \in Ess^{-1}$ tais que $e \trianglelefteq f$. Então $e \,\mathcal{J}\, f$. Se $e = f$ então $s^{-1}es = s^{-1}fs$, donde $s^{-1}es \trianglelefteq s^{-1}fs$. Admitamos que $e \neq f$. Suponhamos que $e \notin J$. Então e e f são os únicos idempotentes de J_e. Assim, como $s^{-1}es \neq s^{-1}fs$, se $s^{-1}es = f$ então $s^{-1}fs = e$ e, por conseguinte, atendendo ao Lema 1.4.5, $e = f$, contra a hipótese. Logo,

$$s^{-1}es = e \trianglelefteq f = s^{-1}fs.$$

Admitamos agora que $e \in J$. Então $e, f \in J$ e $J \leq_{\mathcal{J}} J_s$. Se $s \in J$, como $e, f \leq ss^{-1}$, então $e = ss^{-1} = f$, contra a hipótese. Portanto $J <_{\mathcal{J}} J_s$, pelo que, atendendo à hipótese, $|J_s| = 1$ e s é um idempotente. Então, $e, f \leq s$, donde

$$s^{-1}es = e \trianglelefteq f = s^{-1}fs.$$

Assim, $\trianglelefteq$ satisfaz (NO3), pelo que S pertence a $\boldsymbol{PCS}$, contra a hipótese. Podemos então concluir que S possui pelo menos uma $\mathcal{J}$-classe estritamente acima de J com pelo menos dois elementos e portanto com pelo menos dois idempotentes.

Observemos agora que a $\mathcal{J}$-classe J possui exactamente três idempotentes. De facto, se $|J \cap E| \geq 4$ então $|S| \geq 1 + 4^2 + 2^2 = 21$, contra a hipótese. Logo, o semigrupo S possui quanto muito duas $\mathcal{J}$-classes com dois idempotentes, pois caso possuísse pelo menos três teríamos $|S| \geq 1 + 3^2 + 3 \cdot 2^2 = 22$, contra a hipótese.

Conclusão: S possui uma $\mathcal{J}$-classe J com três idempotentes, uma ou duas $\mathcal{J}$-classes com dois idempotentes, em que pelo menos uma delas está estritamente acima de J (relativamente a $\leq_{\mathcal{J}}$), e todas as suas restantes $\mathcal{J}$-classes são triviais.

Nestas condições, uma relação de ordem parcial $\trianglelefteq$ em E que satisfaz as condições (NO1) e (NO2) é normal se e só se

(NO3') para quaisquer $s \in S \setminus E$ e $e, f \in Ess^{-1} \cap J$ tais que $J <_{\mathcal{J}} J_s$ e $e \neq f$, se $e \trianglelefteq f$ então $s^{-1}es \trianglelefteq s^{-1}fs$.

Com efeito, suponhamos que $\trianglelefteq$ é uma relação de ordem parcial em E que satisfaz as condições (NO1), (NO2) e (NO3'). Tomemos $s \in S$ e $e, f \in Ess^{-1}$ tais que $e \trianglelefteq f$. Então $e \,\mathcal{J}\, f$. Se $e = f$ então $s^{-1}es = s^{-1}fs$, donde $s^{-1}es \trianglelefteq s^{-1}fs$. Por outro lado, se $s \in E$ então $e, f \leq s$, donde $s^{-1}es = e \trianglelefteq f = s^{-1}fs$. Admitamos pois que $e \neq f$ e que $s \in S \setminus E$. Suponhamos que $e \notin J$. Então e e f são os únicos idempotentes de J_e. Assim, se $s^{-1}es = f$ então $s^{-1}fs = e$ e, por conseguinte, atendendo ao Lema 1.4.5, $e = f$, contra a hipótese. Logo, $s^{-1}es = e \trianglelefteq f = s^{-1}fs$. Admitamos agora que $e \in J$. Então $e, f \in J$ e $J \leq_{\mathcal{J}} J_s$. Se $s \in J$, como $e, f \leq ss^{-1}$, então $e = ss^{-1} = f$, contra a hipótese. Logo $J <_{\mathcal{J}} J_s$, pelo que, por (NO3'), temos $s^{-1}es \trianglelefteq s^{-1}fs$. Portanto $\trianglelefteq$ é uma ordem normal.

Suponhamos que todas as $\mathcal{J}$-classes não triviais de S acima de J são tais que cada idempotente cobre um ou três idempotentes de J. Seja $\trianglelefteq$ é uma relação de ordem parcial em E que satisfaz as condições (NO1) e (NO2). Provemos que $\trianglelefteq$ satisfaz também a condição (NO3'). Sejam $s \in S \setminus E$ e $e, f \in Ess^{-1} \cap J$ tais que $J <_{\mathcal{J}} J_s$, $e \neq f$ e $e \trianglelefteq f$. Como ss^{-1} cobre dois idempotentes distintos de J, concluímos que ss^{-1} cobre os três idempotentes de J e, visto que $s^{-1}s \in J_s$, pela Proposição 1.4.4, também $s^{-1}s$ cobre os três idempotentes de J. Então, $E \cap J \subseteq Ess^{-1} \cap Es^{-1}s$, pelo que, atendendo ao Lema 1.4.5, $\delta_s|_{E \cap J}$ é a aplicação identidade sobre $E \cap J$, donde

$$s^{-1}es = e \trianglelefteq f = s^{-1}fs.$$

Logo, $\trianglelefteq$ satisfaz a condição (NO3') e portanto $\trianglelefteq$ é uma ordem normal em E, contra a hipótese.

Assim, podemos garantir que o semigrupo S possui pelo menos uma $\mathcal{J}$-classe não trivial acima de J tal que os seus idempotentes cobrem exactamente dois idempotentes de J.

Suponhamos que S possui exactamente uma $\mathcal{J}$-classe J_u, com $u \in S \setminus E$, acima de J tal que os seus idempotentes cobrem exactamente dois idempotentes de J. Observemos que J_u é não trivial, tendo-se $J_u = \{u, uu^{-1}, u^{-1}, u^{-1}u\}$. Sejam $e, f \in J \cap E$ tais que $e \neq f$ e $e, f \leq uu^{-1}$. Seja $J \cap E = \{e, f, g\}$. Como $u^{-1}eu \neq u^{-1}fu$, então $u^{-1}eu \neq g$ ou $u^{-1}fu \neq g$. Podemos admitir sem perda de generalidade que $u^{-1}eu \neq g$. Seja $\trianglelefteq$ uma relação de ordem parcial em E tal que $\trianglelefteq$ satisfaz (NO1), (NO2) e $e \trianglelefteq f \trianglelefteq g$. Provemos que $\trianglelefteq$ satisfaz também (NO3'). Sejam $s \in S \setminus E$ e $e_1, f_1 \in Ess^{-1} \cap J$ tais que $J <_{\mathcal{J}} J_s$, $e_1 \neq f_1$ e $e_1 \trianglelefteq f_1$. Se $s \notin J_u$ então os idempotentes de J_s cobrem necessariamente os três idempotentes de J, pelo que $E \cap J \subseteq Ess^{-1} \cap Es^{-1}s$. Tal como atrás, atendendo ao Lema 1.4.5, $\delta_s|_{E \cap J}$ é a aplicação identidade sobre $E \cap J$, donde

$$s^{-1}e_1s = e_1 \trianglelefteq f_1 = s^{-1}f_1s.$$

Suponhamos então que $s \in J_u$. Logo, $s = u$ ou $s = u^{-1}$. Em primeiro lugar, mostremos que $u^{-1}eu \trianglelefteq u^{-1}fu$. Como $u^{-1}eu \neq g$, então $u^{-1}eu = e$ ou $u^{-1}eu = f$. Se $u^{-1}eu = e$

então $u^{-1}fu \in \{f,g\}$, donde $u^{-1}eu \trianglelefteq u^{-1}fu$. Se $u^{-1}eu = f$ então, como $e \neq f$, pelo Lema 1.4.5, não podemos ter $u^{-1}fu = e$, donde $u^{-1}eu = f \trianglelefteq g = u^{-1}fu$. Então, se $s = u$ temos $(e_1, f_1) = (e, f)$, pelo que

$$s^{-1}e_1s = u^{-1}eu \trianglelefteq u^{-1}fu = s^{-1}f_1s.$$

Se $s = u^{-1}$ então $u^{-1}eu, u^{-1}fu \leq u^{-1}u = ss^{-1}$, donde $(e_1, f_1) = (u^{-1}eu, u^{-1}fu)$, uma vez que $u^{-1}eu \trianglelefteq u^{-1}fu$. Logo, neste caso, temos também

$$s^{-1}e_1s = uu^{-1}euu^{-1} = e \trianglelefteq f = uu^{-1}fuu^{-1} = s^{-1}f_1s,$$

pelo que $\trianglelefteq$ satisfaz a condição (NO3') e portanto $\trianglelefteq$ é uma ordem normal em E, contra a hipótese.

Assim, concluímos que o semigrupo S possui exactamente duas $\mathcal{J}$-classes Q_1 e Q_2 não triviais (ambas com dois idempotentes) acima de J tais que os seus idempotentes cobrem precisamente dois idempotentes de J.

Observemos que, como $|J \cup Q_1 \cup Q_2| = 17$ e $|S| \leq 18$, então todo o elemento não nulo de S pertence a $J \cup Q_1 \cup Q_2$.

Seja $x \in (Q_1 \cup Q_2) \setminus E$. Suponhamos xx^{-1} e $x^{-1}x$ cobrem os mesmos dois idempotentes de J. Seja $u \in (Q_1 \cup Q_2) \setminus E$ tal que $J_u \neq J_x$. Sejam $e, f \in J \cap E$ tais que $e \neq f$ e $e, f \leq uu^{-1}$. Seja $J \cap E = \{e, f, g\}$. Como $u^{-1}eu \neq u^{-1}fu$, então $u^{-1}eu \neq g$ ou $u^{-1}fu \neq g$. Podemos admitir sem perda de generalidade que $u^{-1}eu \neq g$. Seja $\trianglelefteq$ uma relação de ordem parcial em E tal que $\trianglelefteq$ satisfaz (NO1), (NO2) e $e \trianglelefteq f \trianglelefteq g$. Provemos que $\trianglelefteq$ satisfaz também (NO3'). Sejam $s \in S \setminus E$ e $e_1, f_1 \in Ess^{-1} \cap J$ tais que $J <_{\mathcal{J}} J_s$, $e_1 \neq f_1$ e $e_1 \trianglelefteq f_1$. Em primeiro lugar, suponhamos que $s \notin J_u$. Então $s \in J_x$, pelo que $s = x$ ou $s = x^{-1}$, donde ss^{-1} e $s^{-1}s$ cobrem os mesmos dois idempotentes de J. Como $e_1, f_1 \leq ss^{-1}$, então $e_1, f_1 \leq s^{-1}s$, pelo que $\{e_1, f_1\} = \{s^{-1}e_1s, s^{-1}f_1s\}$. Nestas condições, pelo Lema 1.4.5, a aplicação $\delta_s|_{\{e_1,f_1\}}$ é a identidade sobre $\{e_1, f_1\}$, donde

$$s^{-1}e_1s = e_1 \trianglelefteq f_1 = s^{-1}f_1s.$$

Suponhamos agora que $s \in J_u$. Logo, $s = u$ ou $s = u^{-1}$. Mostremos, tal como num caso anterior, que $u^{-1}eu \trianglelefteq u^{-1}fu$. Como $u^{-1}eu \neq g$, então $u^{-1}eu = e$ ou $u^{-1}eu = f$. Se $u^{-1}eu = e$ então $u^{-1}fu \in \{f, g\}$, donde $u^{-1}eu \trianglelefteq u^{-1}fu$. Se $u^{-1}eu = f$ então, como $e \neq f$, pelo Lema 1.4.5, não podemos ter $u^{-1}fu = e$, donde $u^{-1}eu = f \trianglelefteq g = u^{-1}fu$. Então, se $s = u$ temos $(e_1, f_1) = (e, f)$, pelo que

$$s^{-1}e_1s = u^{-1}eu \trianglelefteq u^{-1}fu = s^{-1}f_1s.$$

Se $s = u^{-1}$, temos $u^{-1}eu, u^{-1}fu \leq u^{-1}u = ss^{-1}$ e $u^{-1}eu \trianglelefteq u^{-1}fu$, donde $(e_1, f_1) = (u^{-1}eu, u^{-1}fu)$, pelo que

$$s^{-1}e_1s = uu^{-1}euu^{-1} = e \trianglelefteq f = uu^{-1}fuu^{-1} = s^{-1}f_1s.$$

Consequentemente, $\trianglelefteq$ satisfaz a condição (NO3') e portanto $\trianglelefteq$ é uma ordem normal em E, contra a hipótese. Logo, para qualquer $x \in (Q_1 \cup Q_2) \setminus E$, se $e, f \in J \cap E$ são tais que $e \neq f$ e $e, f \leq xx^{-1}$, então $e \nleq x^{-1}x$ ou $f \nleq x^{-1}x$.

Assim, como $Q_1 \cup Q_2$ possui quatro não idempotentes e há apenas três combinações de dois idempotentes de J, existem $s \in Q_1 \setminus E$, $t \in Q_2 \setminus E$ e $e, f \in J \cap E$ tais que $e \neq f$ e $e, f \leq ss^{-1}, tt^{-1}$. Seja g o terceiro idempotente de J. Então, podemos supor sem perda de generalidade que $s^{-1}es \neq g$. Como $e \neq f$ e $e, f \leq ss^{-1}tt^{-1}$, pela Proposição 1.3.12, $ss^{-1}tt^{-1} \notin J$. Por conseguinte, $ss^{-1}tt^{-1} \in Q_1 \cup Q_2$. Além disso, se $ss^{-1}tt^{-1} = s^{-1}s$, então $s^{-1}s \leq ss^{-1}$, pelo que, uma vez mais pela Proposição 1.3.12, temos $ss^{-1} = s^{-1}s$. Sendo S um semigrupo aperiódico, concluímos que $s \in E$, contra a hipótese. Logo, $ss^{-1}tt^{-1} \neq s^{-1}s$

Sem perda de generalidade, admitamos que $Q_2 \not<_{\mathcal{J}} Q_1$. Então, $ss^{-1}tt^{-1} \notin Q_2$, pelo que $ss^{-1}tt^{-1} = ss^{-1}$, i.e. $ss^{-1} \leq tt^{-1}$ e portanto $Q_1 <_{\mathcal{J}} Q_2$. Além disso, como $e \nleq t^{-1}t$ ou $f \nleq t^{-1}t$, então $ss^{-1} \nleq t^{-1}t$. Logo, atendendo à Proposição 1.4.4, $s^{-1}s \leq t^{-1}t$.

Seja $\trianglelefteq$ uma relação de ordem parcial em E tal que $\trianglelefteq$ satisfaz (NO1), (NO2) e $e \trianglelefteq f \trianglelefteq g$. Mostremos que $s^{-1}es \trianglelefteq s^{-1}fs$. Como $s^{-1}es \neq g$, então $s^{-1}es = e$ ou $s^{-1}es = f$. Se $s^{-1}es = e$ então $s^{-1}fs \in \{f, g\}$, donde $s^{-1}es \trianglelefteq s^{-1}fs$. Se $s^{-1}es = f$ então, como $e \neq f$, pelo Lema 1.4.5, temos $s^{-1}fs = g$, donde $s^{-1}es = f \trianglelefteq g = s^{-1}fs$, também neste caso. Tomemos agora $x \in S \setminus E$ e $e_1, f_1 \in Exx^{-1} \cap J$ tais que $J <_{\mathcal{J}} J_x$, $e_1 \neq f_1$ e $e_1 \trianglelefteq f_1$. Então $x \in \{s, s^{-1}, t, t^{-1}\}$. Se $x = s$ temos $(e_1, f_1) = (e, f)$, pelo que

$$x^{-1}e_1x = s^{-1}es \trianglelefteq s^{-1}fs = x^{-1}f_1x.$$

Se $x = s^{-1}$, temos $s^{-1}es, s^{-1}fs \leq s^{-1}s = xx^{-1}$ e $s^{-1}es \trianglelefteq s^{-1}fs$, donde $(e_1, f_1) = (s^{-1}es, s^{-1}fs)$, pelo que

$$x^{-1}e_1x = ss^{-1}ess^{-1} = e \trianglelefteq f = ss^{-1}fss^{-1} = x^{-1}f_1x.$$

Suponhamos que $t^{-1}et \trianglelefteq t^{-1}ft$. Se $x = t$ então $(e_1, f_1) = (e, f)$, donde $x^{-1}e_1x \trianglelefteq x^{-1}f_1x$. Por outro lado, se $x = t^{-1}$, como $t^{-1}et, t^{-1}ft \leq t^{-1}t = xx^{-1}$ e $t^{-1}et \trianglelefteq t^{-1}ft$, temos $(e_1, f_1) = (t^{-1}et, t^{-1}ft)$, pelo que

$$x^{-1}e_1x = tt^{-1}ett^{-1} = e \trianglelefteq f = tt^{-1}ftt^{-1} = t^{-1}f_1t.$$

Logo, $\trianglelefteq$ satisfaz a condição (NO3') e portanto $\trianglelefteq$ é uma ordem normal em E, contra a hipótese. Consequentemente, $t^{-1}ft \trianglelefteq t^{-1}et$. Então, temos

$$s^{-1}es, s^{-1}fs \leq s^{-1}s \leq t^{-1}t \quad \text{e} \quad t^{-1}et, t^{-1}ft \leq t^{-1}t,$$

pelo que $s^{-1}es = t^{-1}ft$ e $s^{-1}fs = t^{-1}et$. Portanto, $e = ts^{-1}fst^{-1}$ e $f = ts^{-1}est^{-1}$. Ora, uma vez que

$$e, f \leq ss^{-1} = ss^{-1}ss^{-1} = ss^{-1}st^{-1}ts^{-1} = st^{-1}ts^{-1} = st^{-1}(st^{-1})^{-1},$$

pelo Lema 1.4.5, obtemos $e = f$, o que, uma vez mais, é uma contradição. Portanto, se $S \notin \boldsymbol{PCS}$ então $|S| \geq 19$, como queríamos demonstrar. ■

2. Uma classe de geradores de $\boldsymbol{NO}$

Nesta secção consideramos os semigrupos de transformações parciais injectivas e P-crescentes sobre uma cadeia finita, com P uma partição ordenada. Depois de estabelecermos algumas propriedades destes semigrupos, mostramos que constituem uma classe (*natural*) de geradores da pseudovariedade $\boldsymbol{NO}$. Mais ainda, apresentamos uma descrição efectiva de $\boldsymbol{NO}$ à custa desta sua classe de geradores.

Seja P uma partição de um conjunto X. Dizemos que P é uma *partição ordenada* se em P está definida uma ordem linear. Por convenção, sempre que considerarmos uma partição ordenada $P = \{I_i\}_{i=1,\dots,k}$ de um conjunto X com n elementos (donde $1 \leq k \leq n$), assumimos que P é a cadeia $\{I_1 < I_2 < \cdots < I_k\}$.

Seja $P = \{I_i\}_{i=1,\dots,k}$ $(1 \leq k \leq n)$ uma partição ordenada de X_n e, para cada $x \in X_n$, denotemos por i_x o inteiro $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x \in I_i$. Seja s uma transformação parcial de X_n. Dizemos que s é *P-crescente* se s transforma elementos de P em elementos de P e induz uma transformação crescente sobre a cadeia P, i.e. se:

(i) $I_{i_x} \subseteq \mathrm{Dom}(s)$ e $I_{i_x}s = I_{i_{xs}}$, para qualquer $x \in \mathrm{Dom}(s)$;

(ii) $i_x \leq i_y$ implica $i_{xs} \leq i_{ys}$, para quaisquer $x, y \in \mathrm{Dom}(s)$.

Dada uma partição ordenada P de X_n, denotamos por $\mathcal{POI}_{n,P}$ o conjunto de todas as transformações parciais injectivas e P-crescentes sobre X_n.

Observemos que, se P é a partição trivial de X_n, i.e. se $P = \{\{i\}\}_{i=1,\dots,n}$, então $\mathcal{POI}_{n,P}$ é precisamente o monóide $\mathcal{POI}_n$.

Sejam $s \in \mathcal{POI}_{n,P}$ e $x, y \in \mathrm{Dom}(s)$ tais que $i_x < i_y$. Então $i_{xs} < i_{ys}$. Com efeito, se $i_{xs} = i_{ys}$ então $I_{i_x}s = I_{i_{xs}} = I_{i_{ys}} = I_{i_y}s$, pelo que $I_{i_x} = I_{i_y}$, já que s é uma transformação injectiva e $I_{i_x}, I_{i_y} \subseteq \mathrm{Dom}(s)$. Logo, $i_x = i_y$, contra a hipótese. Portanto $i_{xs} < i_{ys}$.

Dada uma partição ordenada P, é evidente que a transformação identidade e a transformação vazia pertencem a $\mathcal{POI}_{n,P}$. Além disso, temos:

Proposição 5.2.1. *Seja P uma partição ordenada de X_n. Então, $\mathcal{POI}_{n,P}$ é um submonóide inverso de $\mathcal{I}_n$.*

Demonstração. Seja $P = \{I_i\}_{i=1,\dots,k}$ uma partição ordenada de X_n. É uma questão de rotina provar que o produto de duas transformações parciais injectivas P-crescentes é ainda uma transformação parcial injectiva P-crescente. Tendo em conta que a identidade é também uma transformação P-crescente, então $\mathcal{POI}_{n,P}$ é um submonóide de $\mathcal{I}_n$. A prova deste resultado fica concluída se mostrarmos que o inverso em $\mathcal{I}_n$ de um elemento de $\mathcal{POI}_{n,P}$ é P-crescente. Com este objectivo, tomemos $s \in \mathcal{POI}_{n,P}$ e seja t o inverso de s em $\mathcal{I}_n$. Sejam $y \in \mathrm{Dom}(t)$ e $x = yt$. Então, $x \in \mathrm{Dom}(s)$, pelo que $I_{i_x} \subseteq \mathrm{Dom}(s)$ e $I_{i_x}s = I_{i_{xs}}$. Logo,

$$I_{i_y} = I_{i_{xs}} = I_{i_x}s \subseteq \mathrm{Im}(s) = \mathrm{Dom}(t)$$

e

$$I_{i_y}t = I_{i_x}st = I_{i_x} = I_{i_{yt}}.$$

Por outro lado, tomemos $y_1, y_2 \in \mathrm{Dom}(t)$ tais que $i_{y_1} \leq i_{y_2}$ e sejam $x_1 = y_1t$ e $x_2 = y_2t$. Então, $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(s)$. Se $i_{x_2} < i_{x_1}$ então

$$i_{y_2} = i_{y_2ts} = i_{x_2s} < i_{x_1s} = i_{y_1ts} = i_{y_1},$$

contra a hipótese. Logo, $i_{x_1} \leq i_{x_2}$, ou seja, $i_{y_1t} \leq i_{y_2t}$. Portanto, t é uma transformação P-crescente, como queríamos demonstrar. ■

A definição dos monóides $\mathcal{POI}_{n,P}$ foi inspirada na construção dos monóides de transformações que respeitam uma n-cadeia de partições em intervalos (apresentada por J. Almeida e P. Higgins em [3]). No entanto, embora os monóides $\mathcal{POI}_{n,P}$ sejam constituídos por transformações que possuem propriedades comuns às transformações que respeitam uma 1-cadeia de partições, eles diferem significativamente daqueles. Notemos por exemplo que os monóides definidos em [3] são aperiódicos, o que em geral não é o caso dos $\mathcal{POI}_{n,P}$. De facto, $\mathcal{POI}_{n,P}$ é aperiódico se e só se P é a partição trivial de X_n e, neste caso, $\mathcal{POI}_{n,P}$ (i.e. $\mathcal{POI}_n$) é constituído por transformações que respeitam uma 0-cadeia (nomeadamente, por todas as transformações parciais e injectivas que respeitam a 0-cadeia de X_n).

Sejam $P = \{I_i\}_{i=1,\dots,k}$ $(1 \leq k \leq n)$ uma partição ordenada de X_n e $s \in \mathcal{POI}_{n,P}$. Sejam $p \in \{0, \dots, k\}$ e $a_1, \dots, a_p \in \{1, \dots, k\}$ tais que $a_1 < \cdots < a_p$ e

$$\mathrm{Dom}(s) = I_{a_1} \cup \cdots \cup I_{a_p}.$$

Então, tomando $b_1, \dots, b_p \in \{1, \dots, k\}$ tais que $I_{a_t}s = I_{b_t}$, para $t = 1, \dots, p$, temos

$$\mathrm{Im}(s) = I_{b_1} \cup \cdots \cup I_{b_p}.$$

Além disso, está naturalmente definida em $\mathcal{POI}_k$ uma transformação parcial ε_s tal que $\mathrm{Dom}(\varepsilon_s) = \{a_1, \dots, a_p\}$ e $a_t\varepsilon_s = b_t$, $t = 1, \dots, p$, i.e.

$$\varepsilon_s = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \\ b_1 & \cdots & b_p \end{pmatrix}.$$

Assim, podemos considerar a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon: & \mathcal{POI}_{n,P} & \to & \mathcal{POI}_k \\ & s & \mapsto & \varepsilon_s. \end{array}$$

A esta aplicação chamamos *esqueleto* de $\mathcal{POI}_{n,P}$ e, para cada $s \in \mathcal{POI}_{n,P}$, à transformação ε_s chamamos *esqueleto* de s.

Observemos que, em geral, o esqueleto ε de $\mathcal{POI}_{n,P}$ é uma aplicação não injectiva e não sobrejectiva. De facto, ε é injectiva (e, consequentemente, sobrejectiva) se e só se P é a partição trivial de X_n, e ε é sobrejectiva se e só se P é uma partição *uniforme*, i.e. uma partição cujos elementos têm todos a mesma cardinalidade.

Para descrever a relação de Green $\mathcal{J}$ em $\mathcal{POI}_{n,P}$ é conveniente introduzir o conceito seguinte. Seja $s \in \mathcal{POI}_{n,P}$ uma transformação não vazia e suponhamos que

$$\varepsilon_s = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \\ b_1 & \cdots & b_p \end{pmatrix}.$$

Chamamos *linha* de s à sequência de p $(1 \leq p \leq k)$ inteiros $(|I_{a_1}|, \dots, |I_{a_p}|)$ e denotamo-la por $\mathrm{Lin}(s)$. A partir da definição de transformação P-crescente, é imediata a igualdade $\mathrm{Lin}(s) = (|I_{b_1}|, \dots, |I_{b_p}|)$. Se s for a transformação vazia, definimos a *linha* de s como sendo a sequência vazia: $\mathrm{Lin}(s) = \emptyset$. Observemos que quaisquer duas transformações de $\mathcal{POI}_{n,P}$ que tenham o mesmo domínio ou a mesma imagem têm necessariamente a mesma linha.

Podemos agora apresentar uma descrição das relações de Green nos monóides $\mathcal{POI}_{n,P}$.

Proposição 5.2.2. *Seja P uma partição ordenada de X_n. Dados $s, t \in \mathcal{POI}_{n,P}$, temos:*

(i) $s\,\mathcal{R}\,t$ se e só se $\mathrm{Dom}(s) = \mathrm{Dom}(t)$;

(ii) $s\,\mathcal{L}\,t$ se e só se $\mathrm{Im}(s) = \mathrm{Im}(t)$;

(iii) $s\,\mathcal{J}t$ se e só se $\mathrm{Lin}(s) = \mathrm{Lin}(t)$.

Demonstração. Seja $P = \{I_i\}_{i=1,\dots,k}$ uma partição ordenada de X_n. Tendo em conta a descrição das relações de Green em $\mathcal{I}_n$ (Proposição 1.3.1), uma vez que $\mathcal{POI}_{n,P}$ é um subsemigrupo regular de $\mathcal{I}_n$, a Proposição 1.3.11 garante-nos a veracidade de (i) e de (ii). Resta-nos demonstrar (iii).

Sejam $s, t \in \mathcal{POI}_{n,P}$. Comecemos por supor que s e t estão $\mathcal{J}$-relacionados em $\mathcal{POI}_{n,P}$. Tomemos $u \in \mathcal{POI}_{n,P}$ tal que $s \mathcal{R} u$ e $u \mathcal{L} t$. Então, $\mathrm{Dom}(s) = \mathrm{Dom}(u)$ e $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(t)$, donde $\mathrm{Lin}(s) = \mathrm{Lin}(u) = \mathrm{Lin}(t)$. Reciprocamente, suponhamos que $\mathrm{Lin}(s) = \mathrm{Lin}(t)$. Se $\mathrm{Lin}(s) = \emptyset$ então $s = t = 0$, donde $s \mathcal{J} t$. Suponhamos que $\mathrm{Lin}(s)$ é uma sequência de p inteiros, com $1 \le p \le k$. Sejam $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p \in \{1, \dots, k\}$ tais que $a_1 < \cdots < a_p$ e $b_1 < \cdots < b_p$,

$$\mathrm{Dom}(\varepsilon_s) = \{a_1, \dots, a_p\} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(\varepsilon_t) = \{b_1, \dots, b_p\}.$$

Então, $(|I_{a_1}|, \dots, |I_{a_p}|) = \mathrm{Lin}(s) = \mathrm{Lin}(t) = (|I_{b_1}|, \dots, |I_{b_p}|)$, pelo que faz sentido considerar uma transformação u de $\mathcal{I}_n$ de domínio igual a $\mathrm{Dom}(s)$ e tal que, para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, a restrição de u a I_{a_i} é uma (qualquer) bijecção de I_{a_i} sobre I_{b_i}. Não há dúvida que $u \in \mathcal{POI}_{n,P}$. Além disso, como $\mathrm{Dom}(u) = \mathrm{Dom}(s)$ e $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(t)$, temos $s \mathcal{R} u \mathcal{L} t$, donde $s \mathcal{J} t$, como queríamos demonstrar. ∎

Lema 5.2.3. *Seja P uma partição ordenada de X_n em k $(1 \le k \le n)$ subconjuntos. Então, o esqueleto $\varepsilon : \mathcal{POI}_{n,P} \to \mathcal{POI}_k$ de $\mathcal{POI}_{n,P}$ é um homomorfismo cujo núcleo é a relação de Green $\mathcal{H}$. Além disso, $\mathcal{H}$ é a maior congruência de $\mathcal{POI}_{n,P}$ que separa idempotentes.*

Demonstração. Tomemos $P = \{I_i\}_{i=1,\dots,k}$. Comecemos por mostrar que ε é um homomorfismo. Sejam $s, t \in \mathcal{POI}_{n,P}$ e $i \in \{1, \dots, k\}$. Então,

$$\begin{aligned} i \in \mathrm{Dom}(\varepsilon_{st}) &\iff I_i \subseteq \mathrm{Dom}(st) \\ &\iff I_i \subseteq \mathrm{Dom}(s) \ \text{ e } \ I_i s \subseteq \mathrm{Dom}(t) \\ &\iff I_i \subseteq \mathrm{Dom}(s) \ \text{ e } \ I_{i\varepsilon_s} \subseteq \mathrm{Dom}(t) \\ &\iff i \in \mathrm{Dom}(\varepsilon_s) \ \text{ e } \ i\varepsilon_s \in \mathrm{Dom}(\varepsilon_t) \\ &\iff i \in \mathrm{Dom}(\varepsilon_s \varepsilon_t), \end{aligned}$$

e portanto $\mathrm{Dom}(\varepsilon_{st}) = \mathrm{Dom}(\varepsilon_s \varepsilon_t)$. Tomemos $i \in \mathrm{Dom}(\varepsilon_{st})$. Como

$$I_{i\varepsilon_{st}} = (I_i)st = (I_{i\varepsilon_s})t = I_{i\varepsilon_s\varepsilon_t},$$

então $i\varepsilon_{st} = i\varepsilon_s\varepsilon_t$. Logo $\varepsilon_{st} = \varepsilon_s\varepsilon_t$ e, por conseguinte, provámos que ε é um homomorfismo.

Em seguida mostramos que o núcleo de ε é $\mathcal{H}$. Sejam $s,t \in \mathcal{POI}_{n,P}$. Comecemos por observar que, pela Proposição 5.2.2, $s\,\mathcal{H}\,t$ se e só se $\mathrm{Dom}(s) = \mathrm{Dom}(t)$ e $\mathrm{Im}(s) = \mathrm{Im}(t)$. Por outro lado, atendendo à definição de ε, temos $\mathrm{Dom}(s) = \mathrm{Dom}(t)$ e $\mathrm{Im}(s) = \mathrm{Im}(t)$ se e só se $\varepsilon_s = \varepsilon_t$. Logo, $s\,\mathcal{H}\,t$ se e só se $(s,t) \in \mathrm{Ker}(\varepsilon)$.

Finalmente, como $\mathcal{H}$ é o núcleo do homomorfismo ε, então $\mathcal{H}$ é uma congruência, donde a maior congruência de $\mathcal{POI}_{n,P}$ que separa idempotentes. ■

Atendendo à Proposição 4.3.6 e ao lema anterior, temos o seguinte resultado:

Proposição 5.2.4. *Para qualquer partição ordenada P de X_n, o monóide $\mathcal{POI}_{n,P}$ pertence à pseudovariedade* $\boldsymbol{NO}$. ■

Tal como acontece em outras famílias importantes de semigrupos de transformações (veja-se [22]) e ao contrário do que sucede com os monóides $\mathcal{POPI}_n$ (Corolário 3.1.9), a classe dos monóides $\mathcal{POI}_{n,P}$ goza da seguinte propriedade:

Proposição 5.2.5. *Sejam $n, n' \in \mathbb{N}$ e P e P' partições ordenadas de X_n e de $X_{n'}$, respectivamente. Então, existe uma partição ordenada Q de $X_{n+n'}$ tal que o monóide $\mathcal{POI}_{n,P} \times \mathcal{POI}_{n',P'}$ é a menos de um isomorfismo um submonóide de $\mathcal{POI}_{n+n',Q}$.*

Demonstração. Sejam $P = \{I_i\}_{i=1,\dots,k}$ $(1 \le k \le n)$ e $P' = \{I'_i\}_{i=1,\dots,\ell}$ $(1 \le \ell \le n')$. Dado um subconjunto X de $X_{n'}$, como atrás, denotamos por $n + X$ o subconjunto $\{n + x \mid x \in X\}$ de $\{n+1, \dots, n+n'\}$. Consideremos a partição ordenada $Q = \{J_i\}_{i=1,\dots,k+\ell}$ de $X_{n+n'}$ definida por

$$J_i = \begin{cases} I_i, & 1 \le i \le k \\ n + I'_{i-k}, & k < i \le k + \ell. \end{cases}$$

Dados $s \in \mathcal{POI}_{n,P}$ e $t \in \mathcal{POI}_{n',P'}$, definimos uma transformação parcial $\theta_{s,t}$ sobre a cadeia $X_{n+n'}$ da seguinte forma:

$$\mathrm{Dom}(\theta_{s,t}) = \mathrm{Dom}(s) \cup (n + \mathrm{Dom}(t))$$

e, para qualquer $x \in \mathrm{Dom}(\theta_{s,t})$,

$$x\theta_{s,t} = \begin{cases} xs, & x \le n \\ (x-n)t + n, & x > n. \end{cases}$$

Então, para quaisquer $s \in \mathcal{POI}_{n,P}$ e $t \in \mathcal{POI}_{n',P'}$, a transformação $\theta_{s,t}$ é injectiva e Q-crescente. Assim, podemos considerar a aplicação

$$\theta : \mathcal{POI}_{n,P} \times \mathcal{POI}_{n',P'} \to \mathcal{POI}_{n+n',Q}$$

definida por $(s,t)\theta = \theta_{s,t}$, para quaisquer $(s,t) \in \mathcal{POI}_{n,P} \times \mathcal{POI}_{n',P'}$.

Comecemos por mostrar que θ é um homomorfismo de monóides. Não há dúvida que θ transforma a identidade de $\mathcal{POI}_{n,P} \times \mathcal{POI}_{n',P'}$ na identidade de $\mathcal{POI}_{n+n',Q}$. Tomemos $(s_1,t_1),(s_2,t_2) \in \mathcal{POI}_{n,P} \times \mathcal{POI}_{n',P'}$. Seja $x \in X_{n+n'}$. Se $x \leq n$ temos

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{Dom}(\theta_{s_1,t_1}\theta_{s_2,t_2}) &\iff x \in \mathrm{Dom}(\theta_{s_1,t_1}) \text{ e } x\theta_{s_1,t_1} \in \mathrm{Dom}(\theta_{s_2,t_2})\\
&\iff x \in \mathrm{Dom}(s_1) \text{ e } xs_1 \in \mathrm{Dom}(s_2)\\
&\iff x \in \mathrm{Dom}(s_1s_2)\\
&\iff x \in \mathrm{Dom}(\theta_{s_1s_2,t_1t_2})
\end{aligned}$$

e, se $x > n$ temos

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{Dom}(\theta_{s_1,t_1}\theta_{s_2,t_2}) &\iff x \in \mathrm{Dom}(\theta_{s_1,t_1}) \text{ e } x\theta_{s_1,t_1} \in \mathrm{Dom}(\theta_{s_2,t_2})\\
&\iff x \in n+\mathrm{Dom}(t_1) \text{ e } (x-n)t_1+n \in n+\mathrm{Dom}(t_2)\\
&\iff x-n \in \mathrm{Dom}(t_1) \text{ e } (x-n)t_1 \in \mathrm{Dom}(t_2)\\
&\iff x-n \in \mathrm{Dom}(t_1t_2)\\
&\iff x \in n+\mathrm{Dom}(t_1t_2)\\
&\iff x \in \mathrm{Dom}(\theta_{s_1s_2,t_1t_2}),
\end{aligned}$$

pelo que

$$\mathrm{Dom}(\theta_{s_1,t_1}\theta_{s_2,t_2}) = \mathrm{Dom}(\theta_{s_1s_2,t_1t_2}).$$

Seja $x \in \mathrm{Dom}(\theta_{s_1,t_1}\theta_{s_2,t_2})$. Se $x \leq n$ então

$$x\theta_{s_1,t_1}\theta_{s_2,t_2} = (xs_1)\theta_{s_2,t_2} = (xs_1)s_2 = x\theta_{s_1s_2,t_1t_2}.$$

Por outro lado, se $x > n$ então

$$\begin{aligned}
x\theta_{s_1,t_1}\theta_{s_2,t_2} &= ((x-n)t_1+n)\theta_{s_2,t_2}\\
&= (((x-n)t_1+n)-n)t_2+n\\
&= (x-n)t_1t_2+n\\
&= x\theta_{s_1s_2,t_1t_2}.
\end{aligned}$$

Logo, $\theta_{s_1,t_1}\theta_{s_2,t_2} = \theta_{s_1s_2,t_1t_2}$, pelo que θ é um homomorfismo de monóides.

Terminamos a demonstração deste resultado, provando que θ é injectiva. Sejam $(s_1,t_1),(s_2,t_2) \in \mathcal{POI}_{n,P} \times \mathcal{POI}_{n',P'}$ tais que $\theta_{s_1,t_1} = \theta_{s_2,t_2}$. Então,

$$\mathrm{Dom}(s_1) \cup (n+\mathrm{Dom}(t_1)) = \mathrm{Dom}(s_2) \cup (n+\mathrm{Dom}(t_2)),$$

pelo que $\mathrm{Dom}(s_1) = \mathrm{Dom}(s_2)$ e $\mathrm{Im}(t_1) = \mathrm{Im}(t_2)$. Seja $x \in \mathrm{Dom}(s_1)$. Então

$$xs_1 = x\theta_{s_1,t_1} = x\theta_{s_2,t_2} = xs_2.$$

Portanto, $s_1 = s_2$. Finalmente, dado $x \in \mathrm{Dom}(t_1)$, temos

$$xt_1 = (xt_1+n)-n = (x+n)\theta_{s_1,t_1} - n = (x+n)\theta_{s_2,t_2} - n = (xt_2+n)-n = xt_2,$$

pelo que $t_1 = t_2$. Portanto, θ é injectiva, como queríamos demonstrar. ∎

Podemos agora enunciar o resultado principal desta secção no qual apresentamos uma descrição efectiva da pseudovariedade de semigrupos inversos $\boldsymbol{NO}$ em termos de uma classe natural de geradores. Mais do que uma descrição de $\boldsymbol{NO}$, este resultado dá-nos uma representação dos elementos da pseudovariedade $\boldsymbol{NO}$.

Teorema 5.2.6. *A classe $\boldsymbol{NO}$ é a pseudovariedade de semigrupos inversos gerada por todos os semigrupos $\mathcal{POI}_{n,P}$, com $n \in \mathbb{N}$ e P uma partição ordenada de X_n. Além disso, para um semigrupo inverso S com n elementos, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$S \in \boldsymbol{NO}$;*

2. *S é isomorfo a um subsemigrupo de $\mathcal{POI}_{n,P}$, para alguma partição ordenada P de X_n.*

Demonstração. Seja S um semigrupo inverso com n elementos.

Se S é isomorfo a um subsemigrupo de $\mathcal{POI}_{n,P}$, para alguma partição ordenada P de X_n, atendendo à Proposição 5.2.4, podemos afirmar que S é um elemento da pseudovariedade $\boldsymbol{NO}$.

Reciprocamente, suponhamos que $S \in \boldsymbol{NO}$. Seja $\trianglelefteq$ uma ordem normal em $E(S)$.

Sejam R uma $\mathcal{R}$-classe de S, $r = |R|$ e $\rho|_R$ a representação de Vagner-Preston restrita a R. Como $\trianglelefteq$ satisfaz (NO2), podemos considerar as $\mathcal{H}$-classes $H_1, \dots, H_k$ $(1 \leq k \leq r)$ de S contidas em R tais que, dados $s_i \in H_i$, com $i = 1, \dots, k$, então

$$s_1^{-1}s_1 \trianglelefteq s_2^{-1}s_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq s_k^{-1}s_k.$$

Observemos que, dadas duas $\mathcal{H}$-classes distintas H e H' de S contidas em R, se $s, t \in H$ e $u \in H'$, temos

$$ss^{-1} = tt^{-1} = uu^{-1} \text{ e } s^{-1}s = t^{-1}t \neq u^{-1}u,$$

pelo que a indexação das $\mathcal{H}$-classes contidas em R que considerámos não depende dos elementos nelas escolhidos.

Consideremos a partição (uniforme) ordenada $P_R = \{H_i\}_{i=1,\dots,k}$ de R em $\mathcal{H}$-classes e, para cada $x \in R$, denotemos por i_x o inteiro $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x \in H_i$.

Sejam $s \in S$ e $\alpha = \rho_s|_R$. Recordemos que $\alpha : Sss^{-1} \cap R \to Ss^{-1}s \cap R$ está definida por $x\alpha = xs$, para qualquer $x \in Sss^{-1} \cap R$.

Tomemos $x \in \operatorname{Dom}(\alpha)$. Então $H_{i_x} \subseteq \operatorname{Dom}(\alpha)$ e $H_{i_x}\alpha = H_{i_{x\alpha}}$. Com efeito, se $y \in H_{i_x}$ então $y \mathcal{R} x$ e $y = yy^{-1}y = yx^{-1}x = yx^{-1}xss^{-1}$, pelo que $y \in Sss^{-1} \cap R$. Portanto $H_{i_x} \subseteq \operatorname{Dom}(\alpha)$. Por outro lado, como $S \in \boldsymbol{NO}$, pelo Corolário 5.1.3, então $\mathcal{H}$

é uma congruência em S. Logo, dado $y \in H_{i_x}$, temos $xs\,\mathcal{H}\,ys$, i.e. $y\alpha \in H_{i_{x\alpha}}$, portanto $H_{i_x}\alpha \subseteq H_{i_{x\alpha}}$. Uma vez que α é injectiva e $|H_{i_x}| = |H_{i_{x\alpha}}|$, obtemos $H_{i_x}\alpha = H_{i_{x\alpha}}$.

Sejam $x, y \in \mathrm{Dom}(\alpha)$ tais que $i_x \leq i_y$. Então $x = xss^{-1}$, $y = yss^{-1}$ e $x^{-1}x \trianglelefteq y^{-1}y$. Logo $x^{-1}x, y^{-1}y \leq ss^{-1}$ e, como $\trianglelefteq$ satisfaz (NO3), temos $s^{-1}x^{-1}xs \trianglelefteq s^{-1}y^{-1}ys$, i.e. $(x\alpha)^{-1}(x\alpha) \trianglelefteq (y\alpha)^{-1}(y\alpha)$, pelo que $i_{x\alpha} \leq i_{y\alpha}$.

Assim, dado $s \in S$, podemos considerar $\rho_s|_R$ como sendo um elemento de $\mathcal{POI}_{r,P_R}$, para certa partição ordenada P_R de X_r. Portanto, $\rho|_R$ pode ser encarado como um homomorfismo de S em $\mathcal{POI}_{r,P_R}$. Considerando todas as representações de Vagner-Preston de S restritas a uma $\mathcal{R}$-classe de S, concluímos que S é isomorfo a um subsemigrupo do produto directo dos semigrupos $\mathcal{POI}_{r,P_R}$, com $R \in S/\mathcal{R}$ e $r = |R|$. Por conseguinte, atendendo à Proposição 5.2.5, o semigrupo S é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de $\mathcal{POI}_{n,P}$, para alguma partição ordenada P de X_n.

Finalmente, podemos concluir que $\boldsymbol{NO}$ é a pseudovariedade de semigrupos inversos gerada por todos os semigrupos $\mathcal{POI}_{n,P}$, com $n \in \mathbb{N}$ e P uma partição ordenada de X_n. ■

Uma vez que as partições P_R consideradas na demonstração do resultado anterior são uniformes, obtemos o resultado seguinte:

Proposição 5.2.7. *A pseudovariedade* $\boldsymbol{NO}$ *é gerada pelos semigrupos* $\mathcal{POI}_{n,P}$*, com* $n \in \mathbb{N}$ *e* P *uma partição ordenada uniforme de* X_n*.* ■

3. O supremo $\boldsymbol{PCS} \vee \boldsymbol{G}$

Na última secção deste capítulo temos por objectivo apresentar uma descrição efectiva do supremo das pseudovariedades de semigrupos inversos $\boldsymbol{PCS}$ e $\boldsymbol{G}$.

Pelo Teorema 5.1.4 temos $\boldsymbol{PCS} \subseteq \boldsymbol{NO}$ e pelo Exemplo 4.3.1.1 temos $\boldsymbol{G} \subseteq \boldsymbol{NO}$, donde podemos afirmar que

$$\boldsymbol{PCS} \vee \boldsymbol{G} \subseteq \boldsymbol{NO}.$$

Naturalmente, faz sentido perguntarmo-nos se a inclusão recíproca é verdadeira. A resposta a esta questão é afirmativa. Com efeito, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.3.1. *A pseudovariedade de semigrupos inversos* $\boldsymbol{PCS} \vee \boldsymbol{G}$ *é decidível. Mais precisamente,* $\boldsymbol{PCS} \vee \boldsymbol{G} = \boldsymbol{NO}$*.*

Optámos por apresentar duas demonstrações distintas deste teorema por a primeira ser a original, ser directa e construtiva e a segunda ser mais “elegante”. A segunda foi inspirada no trabalho [34] de D. McAlister e utiliza *coberturas E-unitárias*. Esta teve origem numa sugestão de M. Volkov e é a apresentada em [14] .

Demonstração 1 de 5.3.1.

Tendo em conta a Proposição 5.2.7, para provar que $\boldsymbol{NO}$ está contida em $\boldsymbol{PCS} \vee \boldsymbol{G}$, basta mostrar que $\mathcal{POI}_{n,P} \in \boldsymbol{PCS} \vee \boldsymbol{G}$, para qualquer partição ordenada uniforme de X_n e para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $P = \{I_i\}_{i=1,\dots,k}$ $(1 \leq k \leq n)$ uma partição ordenada uniforme de X_n e $\mathcal{S}_n$ o grupo simétrico sobre X_n. Seja $\mathcal{S}_{n,k}$ o subconjunto de $\mathcal{POI}_k \times \mathcal{S}_n$ constituído pelos pares $(s,g) \in \mathcal{POI}_k \times \mathcal{S}_n$ tais que $I_i g = I_{is}$, para qualquer $i \in \mathrm{Dom}(s)$. É uma questão de rotina provar que:

Lema 5.3.2. *O conjunto $\mathcal{S}_{n,k}$ é um submonóide inverso de $\mathcal{POI}_k \times \mathcal{S}_n$.* ∎

Para cada $z = (s,g) \in \mathcal{S}_{n,k}$, definimos uma transformação $\bar{z}$ de $\mathcal{I}_n$ da seguinte forma:

$$\mathrm{Dom}(\bar{z}) = \bigcup_{i \in \mathrm{Dom}(s)} I_i$$

e $x\bar{z} = xg$, para qualquer $x \in \mathrm{Dom}(\bar{z})$ (i.e. a transformação $\bar{z}$ é a restrição da permutação g a $\cup_{i \in \mathrm{Dom}(s)} I_i$).

Lema 5.3.3. *Para qualquer $z \in \mathcal{S}_{n,k}$, $\bar{z} \in \mathcal{POI}_{n,P}$.*

Demonstração. Seja $z = (s,g) \in \mathcal{S}_{n,k}$. Tomemos $x \in \mathrm{Dom}(\bar{z})$. Seja $i \in \mathrm{Dom}(s)$ tal que $x \in I_i$. Então $I_i \subseteq \mathrm{Dom}(\bar{z})$. Seja $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x\bar{z} \in I_j$. Então, como $x\bar{z} = xg$ temos $I_i\bar{z} = I_i g = I_{is}$, donde $x\bar{z} \in I_{is}$, pelo que $is = j$ e portanto $I_i\bar{z} = I_j$. Consideremos agora $x, y \in \mathrm{Dom}(\bar{z})$. Sejam $i, j \in \mathrm{Dom}(s)$ tais que $x \in I_i$ e $y \in I_j$. Suponhamos que $i \leq j$. Uma vez que $x\bar{z} \in I_i g = I_{is}$, $y\bar{z} \in I_j g = I_{js}$ e $is \leq js$, então $\bar{z} \in \mathcal{POI}_{n,P}$. ∎

Estamos agora em condições de demonstrar a proposição seguinte, que conclui a primeira demonstração do Teorema 5.3.1.

Proposição 5.3.4. *O monóide $\mathcal{POI}_{n,P}$ pertence à pseudovariedade $\boldsymbol{PCS} \vee \boldsymbol{G}$.*

Demonstração. Atendendo ao Lema 5.3.3, podemos considerar a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{S}_{n,k} & \to & \mathcal{POI}_{n,P} \\ & z & \mapsto & \bar{z}. \end{array}$$

Como $\mathcal{S}_{n,k} \in \boldsymbol{PCS} \vee \boldsymbol{G}$, pelo Lema 5.3.2, para demonstrar o resultado basta verificar que φ é um homomorfismo sobrejectivo.

Sejam $u = (s, g)$ e $v = (t, h)$ dois elementos de $\mathcal{S}_{n,k}$. Tomemos $x \in \mathrm{Dom}(\bar{u}\bar{v})$. Então, $x \in \mathrm{Dom}(\bar{u})$ e $x\bar{u} \in \mathrm{Dom}(\bar{v})$, pelo que $x \in I_i$, para certo $i \in \mathrm{Dom}(s)$, e $x\bar{u} \in I_j$, para certo $j \in \mathrm{Dom}(t)$. Ora, $x\bar{u} = xg \in I_ig = I_{is}$, pelo que $j = is$. Então $i \in \mathrm{Dom}(st)$ e, portanto, $x \in \mathrm{Dom}(\overline{uv})$. Reciprocamente, tomemos $x \in \mathrm{Dom}(\overline{uv})$. Então $x \in I_i$, para certo $i \in \mathrm{Dom}(st)$. Logo, como em particular $i \in \mathrm{Dom}(s)$, temos $x \in \mathrm{Dom}(\bar{u})$. Por outro lado, $x\bar{u} = xg \in I_ig = I_{is}$ e $is \in \mathrm{Dom}(t)$, pelo que $x\bar{u} \in \mathrm{Dom}(\bar{v})$. Portanto $x \in \mathrm{Dom}(\bar{u}\bar{v})$. Vimos pois que $\mathrm{Dom}(\bar{u}\bar{v}) = \mathrm{Dom}(\overline{uv})$. Agora, dado $x \in \mathrm{Dom}(\overline{uv})$, temos $x\overline{uv} = x(gh) = (xg)h = (x\bar{u})\bar{v}$. Logo, $(uv)\varphi = u\varphi v\varphi$, pelo que φ é um homomorfismo.

Resta mostrar que φ é sobrejectiva. Tomemos $t \in \mathcal{POI}_{n,P}$. Sejam $s = \varepsilon_t$ (em que ε_t representa o esqueleto de t), g uma permutação qualquer de X_n cuja restrição a $\mathrm{Dom}(t)$ coincide com t (a existência de uma permutação nestas condições está garantida, visto que t é uma transformação injectiva) e $z = (s, g)$. Seja $i \in \mathrm{Dom}(s)$. Então $I_ig = I_it = I_{i\varepsilon_t} = I_{is}$, uma vez que t é P-crescente. Logo $z \in \mathcal{S}_{n,k}$ e $\bar{z} = t$, donde φ é um homomorfismo sobrejectivo. ∎

Demonstração 2 de 5.3.1.

Como referimos no início desta secção, na segunda demonstração do Teorema 5.3.1 utilizamos *coberturas E-unitárias.* Assim, começamos por definir este conceito.

Um semigrupo regular T diz-se *E-unitário* se $E(T)$ é uma classe de congruência de alguma *congruência de grupo* de T (i.e. de uma congruência ρ tal que T/ρ é um grupo), nomeadamente da menor congruência de grupo σ de T. Uma *cobertura E-unitária* de um semigrupo inverso S é um homomorfismo sobrejectivo θ de um semigrupo E-unitário T em S que separa idempotentes. Um resultado bem conhecido, que se deve a D. McAlister [32], estabelece que qualquer semigrupo inverso S possui uma cobertura E-unitária $\theta : T \to S$ e que, se S for finito, o semigrupo T pode ser construído de modo que também seja finito (vejam-se também [19, 23, 26, 35] e ainda [33]).

Uma vez que um semigrupo inverso T é E-unitário se e só se $\sigma \cap \mathcal{L} = 1_T$ (veja-se [26, Proposição 5.9.1]), com σ a menor congruência de grupo de T, temos o seguinte lema:

Lema 5.3.5. *Sejam T um semigrupo inverso E-unitário, σ a menor congruência de grupo de T e μ a maior congruência que separa idempotentes de T. Então T é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de $T/\mu \times T/\sigma$.*

Demonstração. Consideremos o homomorfismo $\varphi : T \to T/\mu \times T/\sigma$ definido por $t\varphi = (t\mu, t\sigma)$, para qualquer $t \in T$. O lema fica demonstrado se provarmos que φ é injectivo. Com este objectivo, tomemos $s, t \in T$ tais que $s\varphi = t\varphi$. Então, $s\mu = t\mu$ e $s\sigma = t\sigma$. Como $\mu \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}$, então $(s, t) \in \sigma \cap \mathcal{L}$. Assim, atendendo à observação anterior, temos $s = t$, pelo que φ é injectivo. ∎

Apresentamos agora a segunda demonstração do Teorema 5.3.1. Seja S um semigrupo inverso normalmente ordenado. Seja $\theta : T \to S$ uma cobertura E-unitária de S, com T um semigrupo finito. Uma vez que θ é um homomorfismo que separa idempotentes, a Proposição 4.3.6 garante-nos que $T \in \boldsymbol{NO}$. Além disso, pelo lema anterior, T é a menos de um isomorfismo um subsemigrupo de $T/\mu \times T/\sigma$. Logo, como $T/\mu \in \boldsymbol{PCS}$ (atendendo ao Corolário 5.1.3 e ao Teorema 5.1.4) e T/σ é um grupo, então $T \in \boldsymbol{PCS} \vee \boldsymbol{G}$. Consequentemente, $S \in \boldsymbol{PCS} \vee \boldsymbol{G}$, como queríamos demonstrar.

Problemas

Apresentamos seguidamente alguns problemas, que julgamos em aberto, relacionados com os assuntos que tratámos nesta dissertação.

Como dissemos na Introdução, a procura de uma descrição efectiva para a pseudovariedade de semigrupos $\boldsymbol{O}$ foi sugerida por J.-E. Pin em 1987. Esta questão foi talvez a principal motivação para este trabalho e constitui o primeiro problema.

Problema 1. *Determinar, se for possível, uma descrição efectiva para a pseudovariedade de semigrupos* $\boldsymbol{O}$.

As questões seguintes surgem naturalmente na sequência dos resultados apresentados neste trabalho.

Problema 2. *Determinar, se for possível, uma descrição efectiva para a pseudovariedade de semigrupos* $\boldsymbol{POI}$.

Conjectura: $\boldsymbol{POI} = \boldsymbol{NOS} \cap \boldsymbol{A}$.

Problema 3. *Determinar se* $\boldsymbol{O} \cap \boldsymbol{Inv} = \boldsymbol{PCS}$.

Problema 4. *Determinar se* $\boldsymbol{O} \cap \boldsymbol{Ecom} = \boldsymbol{POI}$.

Problema 5. *Determinar, se for possível, uma descrição efectiva para a pseudovariedade de semigrupos inversos* $\boldsymbol{POPI} \cap \boldsymbol{Inv}$.

Problema 6. *Determinar, se for possível, uma descrição efectiva para a pseudovariedade de semigrupos* $\boldsymbol{POPI}$.

Referências

1. Aĭzenštat, A. Ya., *Generating relations of an endomorphism semigroup of finite linearly ordered set*, Sibir. Mat. **3** (1962), 161-169 (Russo).

2. Almeida, J., Finite Semigroups and Universal Algebra, *World Scientific,* Singapore, 1995.

3. Almeida, J., and P. M. Higgins, *Monoids respecting n-chains of intervals*, J. Algebra **187** (1997), 183-202.

4. Almeida, J., and M. V. Volkov, *The gap between partial and full*, aceite em Int. J. Algebra Computation.

5. Ash, C. J., *Finite semigroups with commuting idempotents*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **43** (1987), 81-90.

6. Auinger, K., e T. E. Hall, *Representations of semigroups by transformations and the congruence lattice of an eventually regular semigroup*, J. Algebra Computation **6** (1996), 655-685.

7. Bourbaki, N., Éléments de mathématique, Algèbre I, Chapitres 1 à 3, *Hermann,* Paris, 1970.

8. Catarino, P. M. and P. M. Higgins, *The monoid of orientation-preserving mappings on a chain*, aceite em Semigroup Forum.

9. Catarino, P. M., *Monoids of orientation-preserving transformations of a finite chain and their presentation*, aceite em Proceedings of the Conference on Semigroups and Applications, St-Andrews, Scotland, 1997.

10. Cowan, D. F., and N. R. Reilly, *Partial cross-sections of symmetric inverse semigroups*, Int. J. Algebra Computation **5** (1995), 259-287.

11. Edwards, P. M., *Eventually regular semigroups*, Bull. Austral. Math. Soc. **28** (1983), 23-38.

12. Edwards, P. M., *Fundamental semigroups*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **99A** (1985), 313-317.

13. Fernandes, V. H., *Semigroups of order-preserving mappings on a finite chain: a new class of divisors*, Semigroup Forum **54** (1997), 230-236.

14. Fernandes, V. H., *Normally ordered inverse semigroups*, Semigroup Forum **56** (1998), 418-433.

15. Fernandes, V. H., *The monoid of all injective order preserving partial transformations on a finite chain*, submetido.

16. Fernandes, V. H., *The monoid of all injective orientation preserving partial transformations on a finite chain*, submetido.

17. Froidure, V. and J.-E. Pin, *Algorithms for computing finite semigroups*, Cucker, F. (ed.) et al., Foundations of computational mathematics. Selected papers of a conference held at IMPA in Rio de Janeiro, Brazil, January 1997. Berlin: Springer, 112-126.

18. Gomes, G. S. M. and J. M. Howie, *On the ranks of certain semigroups of order preserving transformations*, Semigroup Forum **45** (1992), 272-282.

19. Grillet, P. A., Semigroups, An Introduction to the Structure Theory, *Marcel Dekker, Inc,* 1995.

20. Hall Jr., M., Combinatorial Theory, *John Wiley & Sons,* 1967.

21. Higgins, P. M., *Divisors of semigroups of order-preserving mappings on a finite chain*, Int. J. Algebra Computation **5** (1995), 725-742.

22. Higgins, P. M., *Pseudovarieties generated by transformations semigroups*, aceite em J. S. Ponizovskii and S. Kublanovsky (eds.). *Semigroups and Their Applications Including Semigroup Rings.* Walter de Gruyter.

23. Higgins, P. M., Techniques of Semigroup Theory, *Oxford University Press,* 1992.

24. Higgins, P. M. and S. W. Margolis, *Finite aperiodic semigroups with commuting idempotents and generalizations*, Working Paper 98-09, Dep. of Math., Univ. of Essex, 1998.

25. Howie, J. M., An Introduction to Semigroup Theory, *Academic Press,* 1976.

26. Howie, J. M., Fundamentals of Semigroup Theory, *Oxford University Press,* 1995.

27. Kurosh, A., Cours d'algèbre supérieure, *Editions Mir,* 1973.

28. Lallement, G., Semigroups and Combinatorial Applications, *John Wiley & Sons,* 1979.

29. Lavers, T. G., *The monoid of ordered partitions of a natural number*, Semigroup Forum **53** (1996), 44-56.

30. Linton, S., G. Pfeiffer, E. Robertson and N. Ruškuc, *Monoid v2.0*, GAP package, 1997.

31. McAlister, D., *Semigroup for Windows*, 1997.

32. McAlister, D. B., *Groups, semilattices and inverse semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 227-244.

33. McAlister, D. B., *Some covering and embedding theorems for finite inverse semigroups*, J. Austral. Math. Soc. **22** (Series A) (1976), 188-211.

34. McAlister, D. B., *On a problem of M. P. Schützenberger*, Proc. Edinb. Math. Soc. **23** (1980), 243-247.

35. Petrich, M., Inverse Semigroups, *John Wiley & Sons,* 1984.

36. Pfeiffer, G., *fpmonoid.g v2.0*, GAP package, 1997.

37. Pin, J.-E., *Semigroupe v0.5*, 1998.

38. Pin, J.-E., *Varieties of Formal Languages*, North Oxford Academic, 1986.

39. Pin, J.-E., ***BG*** = ***PG****: a sucess story*, J. Fountain (ed.), Semigroups, Formal Languages and Groups, 33-47, Kluwer Academic Pub., 1995.

40. Repnitskiĭ, V. B., and M. V. Volkov, *The finite basis problem for the pseudovariety $\mathcal{O}$*, aceite em Proc. Royal Soc. Edinburgh.

41. RHODES, J., AND P. WEIL, *Decomposition techniques for finite semigroups, using categories I*, J. Pure and Applied Algebra **62** (1989), 269-284.

42. RUŠKUC, N., Semigroup Presentations, *Ph. D. Thesis,*University of St-Andrews, 1995.

43. SCHÖNERT, M., ET AL., *GAP – Groups, Algorithms, and Programming.*, Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, fifth edition, 1995.

44. SOLOMON, A., *Monoids of order preserving transformations of a finite chain*, Research Report 94-8, School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, 1994.

45. VERNITSKII, A., AND M. V. VOLKOV, *A proof and generalisation of Higgins' division theorem for semigroups of order-preserving mappings*, Izv.vuzov. Matematika, (1995), No.1, 38-44.

46. VOLKOV, M. V., *The finite basis problem for the pseudovariety $\mathcal{PO}$*, pré-publicação.

47. WIDI, M. O., *Semigroup functions for GAP v1.25*, GAP package, 1994.

Índice Remissivo

Notações